Matematica II, 27.04.04

Abbiamo dato una descrizione delle colonne della matrice prodotto in funzione delle colonne della matrice primo fattore; ora diamo una descrizione delle righe della matrice prodotto in funzione delle righe della matrice secondo fattore.

Partiamo da un conto:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + 2\beta & 3\alpha + 4\beta & 5\alpha + 6\beta \end{bmatrix}$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \end{bmatrix},$$

che puo' essere interpretato dicendo che il vettore riga 1×3 prodotto del generico vettore riga 1×2 per la matrice 2×3 data e' la combinazione lineare delle 2 righe dalla matrice 2×3 con i pesi dati dalle 2 componenti del vettore riga 1×2.

Piu' in generale si hanno i seguenti fatti

- *il vettore riga $1 \times n$ prodotto di un vettore riga $1 \times m$ per una matrice di tipo $m \times n$ puo' essere visto come la combinazione lineare delle m righe dalla matrice $m \times n$ pesate con le m componenti del vettore riga $1 \times m$:*

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \ldots + \alpha_m B_m.$$

- *nella matrice prodotto di una matrice matrice di tipo $q \times m$ per una matrice di tipo $m \times n$*

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{q1} & \alpha_{q2} & \ldots & \alpha_{qm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix},$$

la prima riga puo' essere vista come la combinazione lineare

$$\alpha_{11} B_1 + \alpha_{12} B_2 + \ldots + \alpha_{1m} B_m$$

delle m righe della matrice $m \times n$ con i pesi dati dalle m componenti della prima riga della matrice $q \times m$; la seconda riga puo' essere vista come la combinazione lineare

$$\alpha_{21}B_1 + \alpha_{22}B_2 + \ldots + \alpha_{2m}B_m$$

delle m righe della matrice $m \times n$ con i pesi dati dalle m componenti della seconda riga della matrice $q \times m$; ...

In base a queste considerazioni e' immediato verificare che

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ e & f \\ a & b \end{bmatrix}.$$

Il punto di vista esposto rende inoltre evidente che

- *un'equazione matriciale*

$$X_{q\times m}A_{m\times n} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{q1} & x_{q2} & \ldots & x_{qm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_q \end{bmatrix} = B_{q\times n}$$

  nella incognita matriciale $X_{q\times m}$ ha soluzioni se e solo se ogni riga della matrice B e' combinazione lineare delle righe $A_1, A_2, \ldots, A_m$ della matrice A; inoltre, nelle varie righe della matrice X compaiono i pesi incogniti di tali combinazioni lineari.

Ricordiamo che per ogni matrice A di tipo $m \times n$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix} = A = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \ldots & C_n \end{bmatrix}, \qquad R_i \in R^n, \quad C_j \in R^m,$$

l'insieme delle righe e l'insieme delle colonne hanno lo stesso rango:

$$r(\{R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_m\}) = r(\{C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n\}),$$

e che questo valore comune viene detto rango della matrice A e viene indicato con

$$r(A).$$

Se A e' quadrata di ordine n, segue che tutte le seguenti condizioni sono equivalenti, cioe' il verificarsi di una qualsiasi di esse implica il verifocarsi di tutte le altre:

- *le colonne di A sono una base di R^n;*
- *le colonne di A generano R^n;*
- *le colonne di A sono linearmente indipendenti;*
- *la matrice A ha rango n;*
- *le righe di A sono linearmente indipendenti;*
- *le righe di A generano R^n;*
- *le righe di A sono una base di R^n.*

Una matrice quadrata soddisfacente una, e dunque ciascuna, di queste condizioni si dice non singolare; una matrice quadrata non soddisfacente una, e dunque nessuna, di queste condizioni si dice singolare.

Esempi. Delle due matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix},$$

la prima e' non singolare e la seconda e' singolare.

Ricordiamo che, se una matrice A possiede sia un'inversa destra che un'inversa sinistra, allora tali inverse coincidono. Dunque in questo caso si ha che: A possiede una sola inversa destra, A possiede una sola inversa sinistra, le due inverse coincidono e costituiscono un'inversa bilatera di A. Quest'unica inversa bilatera, detta semplicemente inversa di A, viene indicata con

$$A^{-1},$$

e si dice che la matrice A e' invrtibile.

Teorema. *Ogni matrice non singolare e' invertibile.*

Verifica. Sia A una matrice quadrata di ordine n, non singolare.

- Poiche' le colonne di A generano R^n, si ha che ciascun vettore di R^n, in particolare anche ciascuna delle colonne della matrice I_n unita' di ordine n, si puo' scrivere come combinazione lineare delle colonne di A. Da cio' segue che l'equazione
$$AX = I_n,$$
nella matrice incognita X quadrata di ordine n, possiede almeno una soluzione $X = B$. Tale matrice B sara' un'inversa destra di A.

- Poiche' le righe di A generano R^n, si ha che ciascun vettore di R^n, in particolare anche ciascuna delle righe della matrice I_n unita' di ordine n, si puo' scrivere come combinazione lineare delle righe di A. Da cio' segue che l'equazione
$$YA = I_n,$$
nella matrice incognita Y quadrata di ordine n, possiede almeno una soluzione $Y = C$. Tale matrice C sara' un'inversa sinistra di A.

Per quanto detto in precedenza si avra', inoltre,
$$B = A^{-1} = C.$$

Esercizio. Si verifichi che la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$
e' non singolare, e se ne calcoli la matrice inversa.

Per verificare che A e' non singolare, basta verificare che le sue colonne sono linearmente indipendenti. Ora, applicando l'algoritmo di Gauss per righe alla matrice A si ottiene la matrice
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$
le cui colonne di sono linearmente indipendenti; dunque anche le colonne di A sono linearmente indipendenti. Per il teorema precedente, possiamo affermare che la matrice A e' invertibile. La matrice inversa di A puo' essere ricavata sia come inversa destra che come inversa sinistra. Qui la ricaviamo come inversa destra; consideriamo dunque l'equazione
$$AX = I_3.$$

Per risolverla, consideriamo la matrice

$$[\ A|\ I_3\ ] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Applicando a questa matrice l'algoritmo di Gauss-Jordan per righe, si ottiene la matrice

$$\left[\begin{array}{ccc|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right].$$

Su questa matrice leggiamo che:

- la quarta colonna e' combinazione lineare delle prime tre colonne, con pesi $1, 3, -2$;
- la quinta colonna e' combinazione lineare delle prime tre colonne, con pesi $0, -3, 2$;
- la sesta colonna e' combinazione lineare delle prime tre colonne, con pesi $-1, 2, -1$.

Possiamo dunque affermare che le stesse relazioni sussistono fra le colonne delle matrice $[\ A|\ I_3\ ]$. Cio' significa che l'equazione

$$AX = I_3,$$

ha soluzione

$$X = \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{array}\right].$$

Questa sara' dunque l'inversa A^{-1} della matrice A.

In seguito useremo la seguente convenzione: quando un vettore $\underline{v}$ viene considerato come vettore colonna, verra' indicato con lo stesso simbolo $\underline{v}$, quando un vettore $\underline{v}$ viene considerato come vettore riga, verra' indicato col simbolo $\underline{v}^T$, che si legge " $\underline{v}$ trasposto."

Viene da chiedersi se ci possano essere matrici invertibili singolari. La chiave della risposta sta nel seguente

Teorema.

- *Se una matrice A di tipo $m \times n$ possiede qualche inversa destra, allora le n colonne di A generano R^m e le m righe di A sono linearmente indipendenti. In particolare, si deve avere $m \leq n$.*
- *Se una matrice A di tipo $m \times n$ possiede qualche inversa sinistra, allora le m righe di A generano R^n e le n colonne di A sono linearmente indipendenti. In particolare, si deve avere $m \geq n$.*

Verifica. Verifichiamo la prima affermazione. Sia S una matrice di tipo $n \times m$ inversa destra di A, cioe' tale che

$$AS = I_m.$$

- Per ogni vettore colonna $\underline{b}$ in R^m, si ha

  $$\underline{b} = I_m\underline{b} = (AS)\underline{b} = A(S\underline{b}).$$

  Questa uguaglianza puo' essere letta dicendo che il vettore colonna $\underline{b}$ e' combinazione lineare delle n colonne della matrice A, pesate dalle componenti del vettore colonna $S\underline{b}$. Dunque le n colonne della matrice A generano R^m.

- Consideriamo una combinazione lineare delle m righe della matrice A il cui risultato sia la riga nulla

  $$\underline{y}^T A = \underline{0}_n.$$

  Moltiplicando il primo membro a destra per la matrice S, si ottiene

  $$(\underline{y}^T A)S = \underline{y}^T (AS) = \underline{y}^T I_m = \underline{y}^T;$$

  moltiplicando il secondo membro a destra per la matrice S, si ottiene

  $$\underline{0}_n S = \underline{0}_m;$$

  dunque si ha

  $$\underline{y}^T = \underline{0}_m.$$

  Cio' significa che l'unica combinazione lineare delle m righe della matrice A il cui risultato e' il vettore nullo e' quella in cui tutti i pesi sono nulli, cioe' le m righe di A sono linearmente indipendenti.

Poiche' le n colonne di A generano R^m, si deve avere $n \geq m$; la stessa conseguenza e' implicata dal fatto che le m righe di A sono vettori indipendenti in R^n.

Dal teorema precedente segue che

Teorema. *Se una matrice A di tipo $m \times n$ possiede inversa bilatera, allora*

- *$m = n$;*
- *le colonne di A formano una base per R^n;*
- *le righe di A formano una base per R^n;*

In altri termini, si ha che la matrice A e' non singolare.

L'inversione di matrici compare in modo naturale nella soluzione di equazioni matriciali. Un'equazione matriciale destra

$$AX = B,$$

dove la matrice A coefficiente della matrice incognita X e' invertibile, possiede una ed una sola soluzione:

$$X = A^{-1}B.$$

Osserviamo esplicitamente che

- si tratta dell'unica possibile soluzione, in quanto
  $AX = B \Rightarrow$
  $A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow$
  $(A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow$
  $I_nX = A^{-1}B \Rightarrow$
  $X = A^{-1}B$;
- si tratta di una soluzione, in quanto
  $A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = I_nB = B.$

Analogamente, un'equazione matriciale sinistra

$$XA = B,$$

dove la matrice A coefficiente della matrice incognita X e' invertibile, possiede una ed una sola soluzione:

$$X = BA^{-1}.$$

Esercizio. Dati in R^3 i vettori

$$\underline{u} = (1,1,0), \quad \underline{v} = (2,3,2), \quad \underline{u} = (3,5,3),$$

si determinino:

- le eventuali combinzioni lineari

$$\underline{u}\alpha + \underline{v}\beta + \underline{w}\gamma$$

dei vettori $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ il cui risultato e' il vettore $(1, 1, 1)$;

- gli eventuali funzionali lineari

$$f : R^3 \to R, \quad f(x, y, z) = ax + by + cz$$

che assumono su ciascuno dei vettori $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ valore 1.