**Matematica II, 04.05.04**

D'ora innanzi l'insieme delle matrici di tipo $m \times n$ ad elementi reali verra' indicato con $R^{m\times n}$.

Per ogni $A, B \in R^{m\times n}$ matrici dello stesso tipo $m \times n$, si puo' ottenere una nuova matrice dello stesso tipo inserendo in ogni posto la somma degli elementi che occupano quel posto in $A$ e in $B$ : questa nuova matrice viene detta somma delle matrici $A$ e $B$ e viene indicata con

$$A + B.$$

In simboli, si ha

$$A = [a_{ij}], \quad B = [b_{ij}], \qquad A + B = [a_{ij} + b_{ij}].$$

La matrice di tipo $m \times n$ avente tutti gli elementi uguali a 0, che viene indicata con $0_{m\times n}$, oppure con 0, si dice matrice nulla di tipo $m \times n$, e svolge il ruolo analogo al ruolo dello 0 dei numeri reali.

**Esempio.**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A + B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Per ogni numero reale $\alpha \in R$ ed ogni matrice $A \in R^{m\times n}$, si puo' ottenere una nuova matrice dello stesso tipo inserendo in ogni posto il prodotto di $\alpha$ per l'elemento che occupa quel posto in $A$ : questa nuova matrice viene detta prodotto del numero reale $\alpha$ per la matrice $A$ e viene indicata con

$$\alpha A.$$

In simboli, si ha

$$\alpha, \quad A = [a_{ij}], \qquad \alpha A = [\alpha a_{ij}].$$

**Esempio.**

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Sull'insieme $R^{m\times n}$ delle matrici di tipo $m\times n$ ad elementi reali sono definite operazioni analoghe a quelle definite sull'insieme $R^p$ delle $p-$ple ordinate di numeri reali, che hanno le stesse proprieta'. Dunque in $R^{m\times n}$ avra' senso parlare di combinazioni lineari di matrici, di indipendenza lineare di matrici, ...; e varranno teoremi del tipo "ogni insieme non vuoto di matrici possiede una base", "tutte le basi di uno stesso insieme non vuoto di matrici hanno la stessa cardinalita'"...

**Esempio.** In $R^{2\times 3}$ si ha

$$\begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} =$$

$$a\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \cdots + f\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$aE_{11} + bE_{21} + cE_{21} + \cdots fE_{23},$$

cioe' ogni matrice di tipo $2\times 3$ si puo' scrivere in un (ed un solo) modo come combinazione lineare delle 6 matrici

$$E_{11},\ E_{21},\ E_{12},\ E_{22},\ E_{13},\ E_{23}$$

di tipo $2\times 3$ aventi un elemento uguale ad 1 e tutti gli altri uguali a 0.

In $R^{m\times n}$ si puo' considerare per ogni $p=1,2,\ldots,m$ ed ogni $q=1,2,\ldots,n$ la matrice

$$E_{pq} = [\delta_{ip}\delta_{jq}]_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}}$$

avente l'elemento all'incrocio fra la $p-$ma riga e la $q-$ma colonna uguale ad 1 e tutti gli altri elementi uguali a 0. [1] Si ha che ogni matrice

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}}$$

di tipo $m\times n$ si puo' scrivere in un (ed un solo) modo come combinazione lineare

$$A = \sum_{\substack{p=1,2,\ldots,m \\ q=1,2,\ldots,n}} a_{pq}E_{pq}$$

delle $mn$ matrici $E_{pq}$. Dunque queste matrici formano una base, la "base canonica", per $R^{m\times n}$.

[1] Ricordiamo che simboli di kronecker $\delta_{ij}$ valgono 1 o 0 secondoche' gli indici siano uguali o diversi.

Leggendo per righe gli elementi di una matrice $A$ di tipo $m \times n$ e trascrivendoli per colonne si ottiene una matrice di tipo $n \times m$, che viene detta matrice trasposta di $A$, e viene indicata con $A^T$.

**Esempio.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = A^T.$$

Piu' formalmente, si ha

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}} \in R^{m\times n}, \quad A^T = [a_{ji}]_{\substack{j=1,2,\ldots,n \\ i=1,2,\ldots,m}} \in R^{n\times m}.$$

Usando l'operatore di trasposizione si puo' dare una nuova rappresentazione delle matrici della base canonica di $R^{m\times n}$, rappresentazione che puo' essere usata per calcolare agevolmente i prodotti di tali matrici. Per semplicita', ci limitiamo al caso $m = n$, cioe' al caso di matrici quadrate di ordine n. Indicati con $\underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_2, \ldots, \underset{\sim}{e}_n$ i vettori della base canonica di $R^n$, pensati come vettori colonna, si ha che $\underset{\sim}{e}_1^T, \underset{\sim}{e}_2^T, \ldots, \underset{\sim}{e}_n^T$ sono i vettori della base canonica di $R^n$, pensati come vettori riga, e si ha

$$\underset{\sim}{e}_p \underset{\sim}{e}_q^T = E_{pq}, \qquad \underset{\sim}{e}_q^T \underset{\sim}{e}_p = \delta_{pq}.$$

Da cio' segue che

$$E_{pq}E_{rs} = \underset{\sim}{e}_p \underset{\sim}{e}_q^T \underset{\sim}{e}_r \underset{\sim}{e}_s^T = \underset{\sim}{e}_p \left( \underset{\sim}{e}_q^T \underset{\sim}{e}_r \right) \underset{\sim}{e}_s^T = \delta_{qr} \underset{\sim}{e}_p \underset{\sim}{e}_s^T = \delta_{qr} E_{ps}.$$

Abbiamo cosi' definito sulle matrici le seguenti operazioni:

- addizione, che prende in entrata due matrici $A, B$ di uno stesso tipo $m \times n$ e fornisce in uscita una matrice $A + B$ ancora di tipo $m \times n$ :

$$+ : R^{m\times n} \times R^{m\times n} \to R^{m\times n}, \qquad (A, B) \mapsto A + B;$$

- moltiplicazione di matrici per scalari, che prende in entrata un numero reale $\alpha$ ed una matrice $A$ di uno certo tipo $m \times n$ e fornisce in uscita una matrice $\alpha A$ ancora di tipo $m \times n$ :

$$+ : R \times R^{m\times n} \to R^{m\times n}, \qquad (\alpha, A) \mapsto \alpha A;$$

- moltiplicazione fra matrici, che prende in entrata una matrice $A$ di tipo $m \times n$ e una matrice $B$ di tipo $n \times p$ e fornisce in uscita una matrice $AB$ di tipo $m \times p$ :

$$+ : R^{m\times n} \times R^{n\times p} \to R^{m\times p}, \qquad (A, B) \mapsto AB;$$

- trasposizione, che prende in entrata una matrice $A$ di uno certo tipo $m \times n$ e fornisce in uscita una matrice $A^T$ di tipo $n \times m$ :

$$+ : R^{m\times n} \to R^{n\times m}, \qquad A \mapsto A^T.$$

Sottolineiamo che l'addizione e la moltiplicazione sono operazioni parziali: non tutte le matrici si possono sommare e non tutte le matrici si possono moltiplicare. Le varie operazioni matriciali sono legate fra di loro dalle seguenti proprieta'

- proprieta' distributive della moltiplicazione rispetto all'addizione:

  $$A(B + C) = AB + AC,$$

  ogniqualvolta le operazioni sono definite, cioe' $A$ ha un tipo della forma $m \times n$ e $B, C$ hanno un tipo della forma $n \times p$;

  $$(A + B)C = AC + BC,$$

  ogniqualvolta le operazioni sono definite, cioe' $A, B$ hanno un tipo della forma $m \times n$ e $C$ ha un tipo della forma $n \times p$;

- proprieta' pseudoassociative della moltiplicazione fra matrici e della moltiplicasione per scalari:

  $$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B);$$

- proprieta' della trasposizione rispetto all'addizione, alla moltiplicazione per scalari, alla moltiplicazione fra matrici:

  $$(A + B)^T = A^T + B^T;$$

  $$(\alpha A)^T = \alpha A^T;$$

  $$(AB)^T = B^T A^T.$$

Un'equazione lineare si dice omogenea quando il termine noto e' nullo, cioe' quando e' della forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0.$$

Un'equazione lineare omogenea in 3 incognite

$$ax + by + cz = 0,$$

dove almeno uno dei coefficienti $a, b, c$ e' non nullo, ha un insieme $V$ delle soluzioni che e' rappresentato geometricamente nello spazio $R^3$ da un piano passante per l'origine del sistema di riferimento. Dunque tale insieme delle soluzioni e' uno spazio vettoriale. Algebricamente, la verifica procede nel modo seguente.

- l'insieme $V$ non e' vuoto, in quanto contiene almeno il vettore nullo $\underline{0} = (0, 0, 0)$;
- l'insieme $V$ e' chiuso rispetto alla somma, cioe' per ogni $\underline{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\underline{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ in $V$, anche $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ appartiene a $V$. Infatti da

  $$ax_1 + by_1 + cz_1 = 0, \quad ax_2 + by_2 + cz_2 = 0$$

  segue che

  $$a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)+c(z_1+z_2) = ax_1+by_1+cz_1+ax_2+by_2+cz_2 = 0+0 = 0.$$

- l'insieme $V$ e' chiuso rispetto alla moltiplicazione per scalari, cioe' per ogni $\alpha$ in $R$ ed ogni $\underline{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ in $V$, anche $\alpha\underline{v}_1 = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$ appartiene a $V$. Infatti da

  $$ax_1 + by_1 + cz_1 = 0$$

  segue che

  $$a(\alpha x_1) + b(\alpha y_1) + c(\alpha z_1) = \alpha(ax_1 + by_1 + cz_1) = \alpha 0 = 0.$$

Un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite si dice omogeneo quando tutti i termini noti sono nulli, cioe' quando la sua rappresentazione matriciale e' della forma

$$A\underline{x} = \underline{0},$$

dove $A \in R^{m \times n}$, $\underline{x} \in R^n$, $\underline{0} \in R^m$. L'insieme $V$ delle soluzioni di un tale sistema lineare omogeneo

$$V = \{\underline{v} \in R^n : \quad A\underline{v} = \underline{0}\}$$

e' sempre uno spazio vettoriale. Grazie alle proprieta' del calcolo matriciale, la verifica di questo fatto generale e' ancora piu' semplice della verifica del fatto particolare sopra esposto:

- l'insieme $V$ non e' vuoto, in quanto contiene almeno il vettore nullo $\underline{0}$;
- l'insieme $V$ e' chiuso rispetto alla somma, cioe' per ogni $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ in $V$, anche $\underline{v}_1 + \underline{v}_2$ appartiene a $V$. Infatti da

  $$A\underline{v}_1 = \underline{0}, \quad A\underline{v}_2 = \underline{0}$$

  segue che

  $$A(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = A\underline{v}_1 + A\underline{v}_2 = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}.$$

- l'insieme $V$ e' chiuso rispetto alla moltiplicazione per scalari, cioe' per ogni $\alpha$ in $R$ ed ogni $\underline{v}_1$ in $V$, anche $\alpha\underline{v}_1$ appartiene a $V$. Infatti da

  $$A\underline{v}_1 = \underline{0}$$

  segue che

  $$A(\alpha\underline{v}_1) = \alpha(A\underline{v}_1) = \alpha\underline{0} = \underline{0}.$$

Ritornando alla discussione sul calcolo matriciale, mettiamo in evidenza che due matrici $A$ e $B$ si possono moltiplicare nei due ordini e sommare se e solo se sono quadrate dello stesso ordine. Mettiamo in evidenza di seguito alcuni aspetti del calcolo nell'insieme

$$R^{n \times n}$$

delle matrici quadrate di ordine n. In esso valgono tutte le proprieta' del calcolo nell'insieme $R$ dei numeri reali (che si ottiene per $n = 1$), tranne

- la commutativita' del prodotto,
- l'invertibilita' di ogni elemento non nullo,

e le loro conseguenze.

La potenza di una matrice quadrata $A$ ad un esponente intero naturale $p = 0, 1, 2, \ldots$ viene definita ponendo

$$A^p = \begin{cases} I_n & per \quad p = 0 \\ AA \cdots A \ (p\ volte) & per \quad p > 0 \end{cases}$$

Per le matrici valgono le proprieta' delle potenze

$$A^p A^q = A^{p+q},$$

$$(A^p)^q = A^{pq},$$

ma in generale non vale la proprieta'

$$(AB)^p = A^p B^p.$$

Infatti

$$(AB)^p = ABAB \cdots AB \ (p \ fattori \ AB)$$

e per ottenere

$$A^p B^p$$

bisognerebbe potere permutare $A$ e $B$, cosa in generale illecita.

La potenza di una matrice non singolare $A$ ad un esponente intero relativo $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ viene definita ponendo

$$A^p = \begin{cases} I_n & & per & p = 0 \\ AA \cdots A & (p \ volte) & per & p > 0 \\ A^{-1}A^{-1} \cdots A^{-1} & (-p \ volte) & per & p < 0 \end{cases}$$

Le osservazioni precedenti si estendono a questo caso.

Se due matrici $A, B$ sono invertibili, allora anche la matrice prodotto $AB$ e' invertibile, e si ha

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Infatti, da un lato si ha

$$ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = I,$$

e dall'altro

$$B^{-1}A^{-1}AB = BIB^{-1} = I.$$

La legge di annullamento del prodotto, cioe'

$$AB = 0 \Rightarrow A = 0 \ oppure \ B = 0$$

non vale, in generale, in $R^{n \times n}$. Infatti, ad esempio, si ha

$$E_{12} \neq 0 \ e \ E_{34} \neq 0, \quad ma \quad E_{12}E_{34} = 0.$$