Matematica II, 11.05.04

Diamo qui la nozione di determinante di una matrice quadrata, le sue prime proprieta', e ne deriviamo una caratterizzazione delle matrici non singolari e una formula per l'inversa di una matrice non singolare. In realta' tutti i problemi finora trattati facendo uso dell'algoritmo di Gauss -dal decidere se un sistema lineare e' o meno consistente, e in caso affermativo risolverlo, al determinare una base per un insieme di vettori, al determinare il rango di una matrice, al decidere se una matrice quadrata e' invertibile, e in caso affermativo determinarne l'inversa- si possono affrontare facendo uso dei determinanti.

Il determinante di una matrice quadrata A e' un numero reale, indicato con $Det(A)$, che viene qui descritto come una espressione negli elementi di A. Per una matrice quadrata di ordine 1, il determinante e' l'unico suo elemento: $Det([a]) = a$. Per introdurre la definizione di determinante di una matrice quadrata di ordine 2, partiamo dal problema di decidere se 2 vettori in R^2 sono o meno linearmente indipendenti.

In R^2 abbiamo visto che due vettori

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

sono linearmente indipendenti se e solo se $a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0$. Si dimostra che l'espressione

$$a_1 b_2 - b_1 a_2$$

ha il seguente significato geometrico: e' la misura, con segno, dell'area del parallelogramma individuato dai vettori $\underline{a}$ e $\underline{b}$, rispetto all'unita' di misura data dall'area del quadrato individuato dai vettori $\underline{e}_1$ e $\underline{e}_2$ della base canonica di R^2. Il segno viene preso positivo o negativo secondoche la rotazione che porta $\underline{a}$ in $\underline{b}$ abbia lo stesso verso o verso opposto alla rotazione che porta $\underline{e}_1$ in $\underline{e}_2$.

Esempio. Per i vettori

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

si ha

$$1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2.$$

Cio' significa che il parallelogramma individuato da $\underline{a}$ e $\underline{b}$ ha area doppia dell'area del quadrato individuato da $\underline{e}_1$ e $\underline{e}_2$, e che la rotazione che porta $\underline{a}$ in $\underline{b}$ ha verso opposto alla rotazione che porta $\underline{e}_1$ in $\underline{e}_2$.

Definiamo il determinante di una matrice quadrata di ordine 2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

come il numero reale

$$Det(A) = ad - bc.$$

Dunque il determinante di una matrice A quadrata di ordine 2 ha come significato geometrico la misura segnata dell'area del parallelogramma individuato dalle due colonne di A.

Riportiamo alcune proprieta' del determinante delle matrici quadrate del secondo ordine. Ciascuna di queste proprieta' continuera' a valere per matrici quadrate di qualsiasi ordine.

- linearita' rispetto ad una colonna, fissate le altre; per esempio, se si fissa la seconda:

$$Det \begin{bmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{bmatrix} = Det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + Det \begin{bmatrix} a' & b \\ c' & d \end{bmatrix}$$

$$Det \begin{bmatrix} \alpha a & b \\ \alpha c & d \end{bmatrix} = \alpha Det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- cambiamento di segno derivante dallo scambio di colonne:

$$Det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = -Det \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix};$$

- invarianza per trasposizione:

$$Det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = Det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

- valore sulla matrice unita':

$$Det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

Definiamo il determinante di una matrice quadrata di ordine 3

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

come il numero reale

$$Det(A) = a_1 Det \begin{bmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix} - b_1 Det \begin{bmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{bmatrix} + c_1 Det \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

ottenuto moltiplicando ciascun elemento della prima riga di A per il determinante della matrice quadrata di ordine 2 ottenuta da A sopprimendo la prima riga e la colonna cui quell'elemento appartiene, e poi sommando con segni alterni i prodotti. Sviluppando quest'espressione si ottiene

$$Det(A) = a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3;$$

possiamo dunque dire che il determinante di una matrice quadrata di ordine 3 e' una certa funzione polinomiale omogenea di terzo grado negli elementi della matrice, e che in essa compaiono 6 monomi.

Si verifica che il determinante $Det(A)$ della matrice A e' fornito da ciascuna delle seguenti espressioni

$$a_1 Det \begin{bmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix} - b_1 Det \begin{bmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{bmatrix} + c_1 Det \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix},$$

$$-a_2 Det \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix} + b_2 Det \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{bmatrix} - c_2 Det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix},$$

$$a_3 Det \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix} - b_3 Det \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix} + c_3 Det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix},$$

che vengono dette sviluppi di Laplace del determinante di A rispetto alla prima, seconda e terza riga.

Si dimostra che il determinante di una matrice A quadrata di ordine 3 ha come significato geometrico la misura, presa con un segno che non ci interessa qui specificare, del volume del parallelepipedo individuato dalle tre colonne di A, rispetto all'unita' di misura data dal volume del cubo individuato dai tre vettori della base canonica di R^3.

Esempio Il determinante della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

pu essere sviluppato secondo la prima riga:

$$1 \cdot (5 \cdot 7 - 8 \cdot 6) - 4 \cdot (2 \cdot 7 - 8 \cdot 3) + 7 \cdot (2 \cdot 6 - 5 \cdot 3) = -13 + 40 - 21 = 6;$$

secondo la seconda riga

$$-2 \cdot (4 \cdot 7 - 7 \cdot 6) + 5 \cdot (1 \cdot 7 - 7 \cdot 3) - 8 \cdot (1 \cdot 6 - 4 \cdot 3) = 28 - 70 + 48 = 6;$$

oppure secondo la terza riga ...

Dunque il volume del parallelepipedo individuato dalle tre colonne di A e' sei volte il volume del cubo individuato dai tre vettori della base canonica di R^3; ne segue, in particolare, che le tre colonne di A sono linearmente indipendenti.

Esempio

$$Det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} = f Det \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = fda.$$

Supposto di avere definito il determinante per le matrici quadrate di ordine $n-1$, definiamo ora il determinante per una matrice

$$A = [a_{ij}]_{i,j=1,2,\ldots,n}$$

quadrata di ordine n.
Per ogni elemento a_{ij} della matrice A, sopprimendo la $i-$ma riga e la $j-$ma colonna di A, si ottiene una matrice quadrata di ordine $n-1$; il suo determinante, moltiplicato per $(-1)^{i+j}$ viene detto complemento algebrico dell'elemento a_{ij}, e viene indicato con

$$A_{ij}.$$

Definiamo il determinante della matrice A come il numero reale

$$Det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n},$$

ottenuto moltiplicando ciascun elemento della prima riga di A per il suo complemento algebrico e poi sommando i prodotti. Sviluppando quest'espressione si ottiene una certa funzione polinomiale omogenea di grado n negli elementi della matrice; in essa compaiono $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1$ monomi.

Esempio

$$Det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$
-0\cdot Det\begin{bmatrix}0&3&1\\1&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}+1\cdot Det\begin{bmatrix}2&3&1\\1&1&1\\2&0&1\end{bmatrix}-2\cdot Det\begin{bmatrix}2&0&1\\1&1&1\\2&1&1\end{bmatrix}+
$$

$$
+0\cdot Det\begin{bmatrix}2&0&3\\1&1&1\\2&1&0\end{bmatrix}=
$$

$0+3+2+0=5.$

Si dimostra che il determinante $Det(A)$ della matrice A e' fornito da ciascuna delle seguenti espressioni

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n},$$

$$a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+\cdots+a_{2n}A_{2n},$$

$$\ldots$$

$$a_{n1}A_{n1}+a_{n2}A_{n2}+\cdots+a_{nn}A_{nn}$$

che vengono dette sviluppi di Laplace di $Det(A)$ secondo la prima, la seconda, ..., la $n-$ma riga di A.

Si dimostra che la somma dei prodotti degli elementi di una riga per i complementi algebrici degli elementi corrispondenti in un altra riga e' sempre nulla:

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad \forall i=1,2,\ldots,n,\ i\neq j.$$

Osserviamo che le relazioni finora stabilite sono in sostanza le relazioni

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\delta_{ij}Det(A),\quad \forall i=1,2,\ldots,n,$$

che si possono sintetizzare nell'unica uguaglianza

$$
\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\&&\vdots&\\a_{n1}&a_{n2}&\ldots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\ldots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\ldots&A_{n2}\\&&\vdots&\\A_{1n}&A_{2n}&\ldots&A_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}DetA&0&\ldots&0\\0&DetA&\ldots&0\\&&\vdots&\\0&0&\ldots&DetA\end{bmatrix}
$$

che a sua volta si puo' esprimere nella forma

$$AA^*=Det(A)\ I_n.$$

La matrice A^* contiene nelle varie colonne i complementi algebrici degli elementi delle varie righe di A.

Prop. *Sia A una matrice quadrata di ordine n. Se $DetA \neq 0$, allora A e' invertibile e*

$$A^{-1} = \frac{A^*}{DetA}.$$

Infatti, sotto la condizione $DetA \neq 0$, si ha

$$AA^* = Det(A)\ I_n \quad \Rightarrow \quad A\frac{A^*}{DetA} = I_n \quad \Rightarrow \quad \exists A^{-1},\ e\ A^{-1} = \frac{A^*}{DetA}.$$

Esempio. Sia

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Se $DetA = ad - bc \neq 0$, allora A e' invertibile e la sua inversa e' data da

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Segnaliamo che il determinante si comporta bene rispetto al prodotto di matrici:

Th.(di Binet) *Il determinante del prodotto di due matrici e' il prodotto dei loro determinanti:*

$$Det(AB) = Det(A)Det(B).$$

Questo teorema ci permentte di completare la caratterizzazione delle matrici invertibili.

Prop. *Sia A una matrice quadrata di ordine n. Se A e' invertibile, allora*

$$DetA \neq 0.$$

Inoltre, il determinante della sua inversa e' l'inverso del suo determinante: $Det(A^{-1}) = Det(A)^{-1}$.

Infatti, dall'esistenza della matrice inversa di A si deduce la relazione

$$Det(A)Det(A^{-1}) = Det(AA^{-1}) = Det(I_n) = 1,$$

da cui segue che $DetA \neq 0$, e che $Det(A^{-1}) = Det(A)^{-1}$.

Le principali proprieta' dei determinanti, dalle quali ogni altra proprieta' puo' essere dedotta, sono espresse dal seguente

Th. *Il determinante, riguardato come funzione delle n colonne di una matrice quadrata di ordine n, gode delle seguenti proprieta'*

- *e' lineare in ciascuna argomento, una volta fissati gli altri, cioe'*

$$Det[\dots\ C_j + C_j'\ \dots] = Det[\dots\ C_j\ \dots] + Det[\dots\ C_j'\ \dots];$$

$$Det[\dots\ \alpha C_j\ \dots] = \alpha Det[\dots\ C_j\ \dots];$$

- *si annulla se due argomenti sono uguali:*

$$Det[\dots C\ \dots\ C \dots] = 0;$$

- *cambia di segno se si scambiano due argomenti:*

$$Det[\dots\ C' \dots\ C''\ \dots] = -Det[\dots\ C'' \dots\ C'\ \dots];$$

- $Det\,(I_n) = 1.$

Inoltre, il determinante e' invariante rispetto alla trasposizione:

$$Det(A) = Det(A^T).$$

Da cio' segue che il determinante, riguardato come funzione delle n righe di una matrice quadrata di ordine n, gode di proprieta' analogne a quelle sopra riportate. Inoltre, i determinanti si possono sviluppare anche per colonne.