Esercizi III

1. Si calcoloino tutti i possibili prodotti fra le matrici

$$U = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

2. E' dato il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} w & -x & +3y & -z & = & 0 \\ w & +4x & -y & +z & = & 0 \\ 3w & +7x & +y & +z & = & 0 \\ 3w & +2x & +5y & -z & = & 0 \end{cases},$$

Ci si chiede se, per ogni scelta dei parametri p, q, le quaterne

$$\begin{cases} w & = & -11p & +3q \\ x & = & 4p & -2q \\ y & = & 5p & \\ z & = & & 5q \end{cases},$$

sono soluzioni del sistema lineare. Usando il prodotto di matrici, si rappresentino sinteticamente il sistema, le soluzioni proposte, e si effettui la verifica.

3. In un certo anno, fra tre citta' A, B, C si sono registrati i seguenti spostamenti di residenza:

   (a) sul totale dei residenti nella citta' A all'inizio dell'anno, e' risultato alla fine dell'anno che l' 80% era ancora residente in A, il 10% aveva preso residenza in B, e il 10% aveva preso residenza in C;

   (b) sul totale dei residenti nella citta' B all'inizio dell'anno, e' risultato alla fine dell'anno che il 10% aveva preso residenza in in A, il 90% era ancora residente B, e lo 0% aveva preso residenza in C;

   (c) sul totale dei residenti nella citta' C all'inizio dell'anno, e' risultato alla fine dell'anno che il 20% aveva preso residenza in A, il 10% aveva preso residenza in B, e il 70% era ancora residente in C.

   Secondo quale legge i numeri x'_A, x'_B, x'_C dei residenti alla fine dell'anno in A, B, C, dipendono dai numeri x_A, x_B, x_C dei residenti all'inizio dell'anno in A, B, C? Supposto che nell'anno successivo si siano registrati gli stessi spostamenti percentuali, secondo quale legge i numeri x''_A, x''_B, x''_C dei residenti alla fine del secondo anno in A, B, C, dipendono dai numeri x_A, x_B, x_C?

4. E' data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 6 \\ -4 & -3 & 9 \end{bmatrix}.$$

   Si trasformi, mediante operazioni elementari sulle righe, la matrice A in una matrice a scala S; per ogni operazione elementare usata, si scriva la matrice elementare corrispondente; si calcoli il prodotto E di queste matrici elementari, prese nell'ordine inverso; si verifichi che $EA = S$.

5. Sia U la matrice quadrata di ordine n con tutti gli elementi uguali ad 1. Si calcolino U^2 e U^3.