ESERCIZI

1. Si supponga che per un certo periodo ciascuno dei membri di un certo gruppo di persone si sia rivolto per un certo servizio ad una ed una sola di due ditte A, B, e che queste due ditte non abbiano avuto clienti al di fuori di quel gruppo. Si supponga inoltre che per quattro anni consecutivi all'interno di quel periodo si sia presentato il seguente fenomeno:

   - sul totale dei clienti della ditta A all'inizio dell'anno, e' risultato alla fine dell'anno che l' 80% era ancora cliente di A, mentre il restante 20% era diventato cliente di B;
   - sul totale dei clienti della ditta B all'inizio dell'anno, e' risultato alla fine dell'anno che il 70% era ancora cliente di B, mentre il restante 30% era diventato cliente di A.

   Se alla fine del secondo anno le ditte A e B contavano entrambe 10.000 clienti, quanti clienti contavano alla fine dei quattro anni? quanti clienti contavano all'inizio dei quattro anni?

2. Per ciascuna delle seguenti matrici, indicare se e' invertibile o meno.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 7 & -3 \\ 3 & -9 & 3 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Si determini l'inversa della matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, e si verifichi il risultato. Data la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, si risolvano le equazioni matriciali

$$AX = B, \qquad XA = B.$$

4. Per ciascuno dei seguenti sottinsiemi di R^3, si dica se e' linearmente indipendente, se e' una base di R^3, se genera R^3.

   $\{\underline{a}_1 = (-2, 6, -4),\ \underline{a}_2 = (3, -9, 6)\}$

   $\{\underline{b}_1 = (-2, 6, -4),\ \underline{b}_2 = (3, -9, 7)\}$

   $\{\underline{c}_1 = (-2, 6, -4),\ \underline{c}_2 = (3, -9, 6),\ \underline{c}_3 = (1, 1, 1)\}$

   $\{\underline{d}_1 = (1, 0, 0),\ \underline{d}_2 = (1, -1, 1),\ \underline{d}_3 = (1, 1, 1)\}$

   $\{\underline{f}_1 = (1, 0, 0),\ \underline{f}_2 = (1, -1, 1),\ \underline{f}_3 = (1, 1, 1),\ \underline{f}_4 = (1, 2, 4)\}$

   $\{\underline{g}_1 = (1, 2, -3),\ \underline{g}_2 = (2, 3, -5),\ \underline{g}_3 = (3, 4, -7),\ \underline{g}_4 = (4, 5, -9)\}$

5. Con riferimento all'esercizio precedente: per ogni insieme linearmente dipendente, si individui un vettore che e' combinazione lineare dei rimanenti; per ogni base, si determinino le coordinate del generico vettore $\underline{v} = (p, q, r)$ di R^3 rispetto a tale base; per ogni insieme che non genera R^3, si individui un vettore di R^3 che non e' combinazione lineare dei vettori di tale insieme.

6. Si determini una base per il sottospazio di R^4 formato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & 0 \\ 5x_1 & +5x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 0 \end{cases} .$$

7. Sia $V = \mathcal{L}[\underline{a},\ \underline{b},\ \underline{c},\ \underline{d}]$ il sottospazio di R^3 generato dai vettori

$$\underline{a} = (2, -4, 6),\ \underline{b} = (-3, 6, -9),\ \underline{c} = (-2, 2, -4),\ \underline{d} = (-2, -4, 2).$$

Si determini una base di V. Il vettore $\underline{w} = (1, 1, 1)$ appartiene a V? Si determinino i vettori (x, y, z) di V le cui componenti soddisfano l'equazione

$$y + z = 0.$$