17.05.05

Due vettori $\underline{u} = (a_1, a_2)$, $\underline{v} = (b_1, b_2)$, con $a_2, b_2 \neq 0$, nel piano R^2 sono allineati se e solo se $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, in altri termini $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. L'espressione

$$a_1b_2 - a_2b_1$$

in realta' rappresenta l'area, con segno, del parallelogramma individuato dai vettori $\underline{u}$, $\underline{v}$; il segno e' positivo o negativo secondoche il verso della rotazione che porta $\underline{u}$ in $\underline{v}$ e' uguale od opposto al verso della rotazione che porta l'asse orientato x_1 nell'asse orientato x_2. Ad esempio, per $\underline{u} = (1, 0)$, $\underline{v} = (0, 1)$, si ottiene $1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$, che e' l'area del quadrato individuato dai due vettori $\underline{u}$, $\underline{v}$, mentre per $\underline{u} = (0, 1)$, $\underline{v} = (1, 0)$, si ottiene $0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$, che e' l'opposto dell'area del quadrato individuato dai due vettori $\underline{u}$, $\underline{v}$.

Lo studio delle condizioni sotto le quali tre vettori $\underline{u} = (a_1, a_2, a_3)$, $\underline{v} = (b_1, b_2, b_3)$, $\underline{v} = (c_1, c_2, c_3)$, nello spazio R^3 sono linearmente dipendenti porta a considerare un'espressione che in realta' rappresenta il volume, con segno, del parallelopipedo individuato dai vettori $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$.

Lo studio delle condizioni sotto le quali n vettori $\underline{v}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots a_{1n})$, $\underline{v}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots a_{2n})$, $\dots$, $\underline{v}_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots a_{nn})$, nello spazio R^n sono linearmente dipendenti porta a considerare un'espressione, che viene detta determinante della matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

e che puo' essere riguardata come l'estensione naturale della nozione di volume, con segno.

Il determinante $det(A)$ della generica matrice quadrata A di ordine n puo' essere definito ricorsivamente nel modo seguente.

1. Per $n = 1$, si definisce il determinante di una matrice quadrata di ordine 1 come l'unico elemento della matrice:

$$det([a_{11}]) = a_{11}.$$

2. Per $n = 2$, si definisce il determinante di una matrice quadrata di ordine 2 come la differenza fra prodotto degli elementi sulla diagonale discendente e il prodotto degli elementi sulla diagonale ascendente:

$$det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Ad esempio,

$$det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = 10 - 12 = -2$$

3. Per $n = 3$, si definisce il determinante di una matrice quadrata di ordine 3 come la somma, a segni alterni, dei prodotti di ciascuno degli elementi della prima riga per il determinante della sottomatrice ottenuta cancellando la prima riga e la colonna cui l'elemento appartiene:

$$det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Ad esempio,

$$det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} =$$

$$1 \cdot det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} - 2 \cdot det \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} + 3 \cdot det \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = 0$$

4. In generale, la definizione del determinante di una matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

quadrata di ordine n viene ricondotta alla definizione del determinante di una matrice quadrata di ordine $n - 1$. In particolare, per ogni $i, j = 1, 2, \dots, n$, si puo' supporre noto il determinante della sottomatrice di A ottenuta cancellando la $i-$ma riga e la $j-$ma colonna; questo determinante viene detto *minore complementare di posto* (i, j) *della matrice* A, e viene indicato con $M_{i,j}$. Si definisce il determinante $det(A)$ della matrice A quadrata di ordine n come la somma, a segni alterni, dei prodotti di ciascuno degli elementi della prima riga per il rispettivo minore complementare:

$$det(A) = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \dots \pm a_{1n}M_{1n},$$

dove l'ultimo segno e' $+$ o $-$ a seconda che n sia dispari o pari.

Si dimostra che

$$\begin{aligned} det(A) &= a_{11}M_{11} - a_{11}M_{12} + \dots \pm a_{1n}M_{1n} \\ &= -a_{21}M_{21} + a_{22}M_{22} - \dots \pm a_{2n}M_{2n} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\vdots\\
&= (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2} + \ldots + (-1)^{i+n}a_{in}M_{in}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Queste espressioni vengono dette *sviluppi di Laplace del determinante di A secondo la prima, seconda, ..., $i-$ma, ... riga.*

Si dimostra pure che

$$
\begin{aligned}
det(A) &= a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \ldots \pm a_{n1}M_{n1}\\
&= -a_{12}M_{12} + a_{22}M_{22} - \ldots \pm a_{n2}M_{n2}\\
&\vdots\\
&= (-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}M_{2j} + \ldots + (-1)^{n+j}a_{nj}M_{nj}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Queste espressioni vengono dette *sviluppi di Laplace del determinante di A secondo la prima, seconda, ..., $j-$ma, ... colonna.*

Esempio

Sviluppando il determinante secondo la prima colonna si ha

$$det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 5 & 6\\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$1\cdot det\begin{bmatrix} 5 & 6\\ 0 & 8 \end{bmatrix} + 0\cdot det\begin{bmatrix} 2 & 3\\ 0 & 8 \end{bmatrix} + 0\cdot det\begin{bmatrix} 2 & 3\\ 5 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$det\begin{bmatrix} 5 & 6\\ 0 & 8 \end{bmatrix} = 40.$$

Proprieta' caratteristiche dei determinanti

Qui di seguito, usiamo una notazione del tipo

$$[C_1, C_2, \ldots C_n]$$

per indicare una matrice quadrata di ordine n con colonne $C_1, C_2, \ldots C_n \in R^n$.

1. Se $C_j = C'_j + C''_j$, allora

   $det[C_1, \dots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \dots C_n] = det[C_1, \dots, C_{j-1}, C'_j, C_{j+1}, \dots C_n] + det[C_1, \dots, C_{j-1}, C''j, C_{j+1}, \dots C_n]$

   Ad esempio

   $det \begin{bmatrix} a' + a'' & b \\ c' + c'' & d \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} a' & b \\ c' & d \end{bmatrix} + det \begin{bmatrix} a'' & b \\ c'' & d \end{bmatrix};$

2. Se $C_j = \alpha C'_j$, con $\alpha \in R$, allora

   $det[C_1, \dots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \dots C_n] = \alpha det[C_1, \dots, C_{j-1}, C'_j, C_{j+1}, \dots C_n].$

   Ad esempio

   $det \begin{bmatrix} a & \alpha b' \\ c & \alpha d' \end{bmatrix} = \alpha det \begin{bmatrix} a & b' \\ c & d' \end{bmatrix}.$

3. Se in due diverse colonne, poniamo la $j-$ma e la $h-$ma, compare lo stesso vettore, se cioe' $C_j = C_h$ con $j \neq h$, allora

   $det[C_1, \dots, C_j, \dots, C_h, \dots C_n] = 0.$

   Ad esempio

   $det \begin{bmatrix} a & a \\ c & c \end{bmatrix} = 0.$

4. Scambiando due diverse colonne, poniamo la $j-$ma e la $h-$ma, il determinante cambia segno:

   $det[C_1, \dots, C_h, \dots, C_j, \dots C_n] = -det[C_1, \dots, C_j, \dots, C_h, \dots C_n].$

   Ad esempio

   $det \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix} = -det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$

5. Per la matrice I unita' di ordine n si ha

   $detI = 1.$

   Ad esempio

   $det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1.$

6. Il determinante di una matrice e' uguale al determinante della sua trasposta:

   $detA = det(A^T).$

   Ad esempio

   $det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$

Le proprieta' 1 e 2 vengono dette proprieta' di multilinearita', la 3 viene detta proprieta' di alternanza, la 4 viene detta proprieta' di antisimmetria.

Come conseguenza della proprieta' 6, si hanno analoghe proprieta' caratteristiche dei determinanti per righe.

Determinanti e operazioni elementari.
Le operazioni lementari su una matrice quadrata hanno il seguente effetto sul determinante della matrice:

- scambiando due righe il determinate cambia segno;
- moltiplicando una riga per uno scalare non nullo, il determinante viene moltiplicato per lo scalare stesso;
- sommando ad una riga un multiplo scalare di un'altra riga, il determinante non cambia.

  Ad esempio, si ha

  $$det \begin{bmatrix} a & b \\ c+\alpha a & d+\alpha b \end{bmatrix} =$$
  $$det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \alpha det \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} =$$
  $$det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

L'algoritmo di Gauss puo' essere usato per calcolare i determinanti di matrici numeriche. Ad esempio

$$det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} =$$
$$det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{bmatrix} =$$
$$det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -3.$$

Teorema *Per una matrice A quadrata di ordine n le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- *A ha rango n;*

- *A e' non singolare;*
- *le colonne di A formano una base di R^n;*
- *le righe di A formano una base di R^n;*
- *il determinante di A e' diverso da zero.*

Basta in sostanza provare che l'ultima condizione e' equivalente alla prima; mostriamo che la prima implica l'ultima. Se la matrice A quadrata di ordine n ha rango n, allora A puo' essere trasformata mediante operazioni elementari del primo e del terzo tipo in una matrice A' triangolare superiore con elementi diagonali non nulli. La matrice A' ha determinante diverso da zero. Il determinante di A' puo' differire dal determinante di A solo per il segno, dunque anche il determinante di A e' diverso da zero.

Teorema *Sia*

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

un sistema lineare di n equazioni in n incognite. Se la matrice A dei coefficienti ha determinante diverso da zero, allora il sistema lineare ha una ed una sola soluzione, le cui componenti sono date dalle seguenti espressioni, dove $C_1, C_2, \ldots, C_n$ indicano le colonne di A.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{det[\underline{b}, C_2, C_3, \ldots, C_{n-1}, C_n]}{det(A)} \\ x_2 &= \frac{det[C_1, \underline{b}, C_3, \ldots, C_{n-1}, C_n]}{det(A)} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{det[C_1, C_2, C_3, \ldots, C_{n-1}, \underline{b}]}{det(A)} \end{aligned}$$

Esempio Il generico sistema lineare di 2 equazioni in 2 incognite

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & = & b_2 \end{array} \right. ,$$

sotto la condizione

$$det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

ha una ed una sola soluzione, data da

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}}{det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \\ x_2 &= \frac{det \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}}{det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \end{aligned}$$