01.03.05

Matrice dei coefficienti e matrice aumentata associate ad un sistema lineare; operazioni elementari sulle righe di una matrice, matrici a scala e matrici a scala ridotta; algoritmo di Gauss per la trasformazione di una matrice in una matrice a scala; algoritmo di Gauss-Jordan per la trasformazione di una matrice in una matrice a scala ridotta; applicazione alla risoluzione di un sistema lineare [cfr. paragrafo 10.2 Matrici associate ad un sistema lineare]. Definizione di rango di una matrice.

Sistema considerato:

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & +t & =1 \\ x & +2y & +3z & +2t & =3 \\ x & +y & +z & +t & =1 \\ -3x & -5y & -7z & -4t & =-5 \end{cases}$$

Esercizio. Quante sono le matrici a scala con 4 righe e 5 colonne, con elementi presi fra 0,1, ..., 9, in cui i pivot compaiono nella prima, seconda e quarta colonna? Quante sono le matrici a scala ridotta con 4 righe e 5 colonne, con elementi presi fra 0,1, ..., 9, in cui i pivot compaiono nella prima, seconda e quarta colonna?

04.03.05

Questa lezione fa riferimento sostanzialmente al paragrafo 10.4 "Rango di una matrice", in particolare alla proprieta' 10.2 (teorema di Rouche'-Capelli) che da' una condizione necessaria e sufficiente affinche' un sistema lineare sia possibile; alla proprieta' 10.4 sui sitemi lineari in cui il numero delle incognite supera quello delle equazioni; alla proprieta' 10.10 sulle matrici non singolari.

Il seguente esercizio e' stato svolto come introduzione a tali teoremi. Di seguito si riporta l'inizio del suo svolgimento.

ESERCIZIO. Discutere il generico sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite.

Siano A la matrice dei coefficienti e $\hat{A}$ la matrice aumentata del generico sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad \hat{A} = \left[\begin{array}{c|c} & a_1 \\ A & a_2 \\ & a_3 \end{array}\right].$$

Applicando operazioni elementari sulle righe secondo l'algoritmo di Gauss, la matrice $\hat{A}$ si puo' trasformare in una matrice a scala

$$\hat{B} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & b_1 \\ & B & & b_2 \\ & & & b_3 \end{array} \right], \quad dove\ B\ e'\ del\ tipo \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}.$$

Il sistema lineare di cui $\hat{B}$ e' la matrice aumentata e' equivalente al sistema lineare di cui $\hat{A}$ e' la matrice aumentata, ma e' piu' semplice da studiare.

Per definizione si ha

$$rango\ di\ \hat{A}\ =\ numero\ di\ righe\ non\ nulle\ di\ \hat{B}.$$

Si osservi che nel processo di trasformazione di $\hat{A}$ in $\hat{B}$, la matrice A e' stata sottoposta ad operazioni elementari sulle righe, che la hanno trasformata nella matrice B, che e' a scala (perche?). Dunque si ha

$$rango\ di\ A\ =\ numero\ di\ righe\ non\ nulle\ di\ B.$$

Discuteremo il sistema lineare in funzione del rango di A e del rango di $\hat{A}$.

- Se il rango di A e' 3, allora B ha 3 righe non nulle e $\hat{B}$ e' del tipo

  $$\hat{B} = \left[\begin{array}{ccc|c} * & ? & ? & b_1 \\ 0 & * & ? & b_2 \\ 0 & 0 & * & b_3 \end{array} \right],$$

  dove i simboli $*$ indicano i vari pivot delle varie righe e i simboli ? indicano elementi qualsiasi.

  Il sistema associato a $\hat{B}$ ha una ed una sola soluzione, cosi' anche il sistema associato a $\hat{A}$ ha una ed una sola soluzione.

  Si osservi che in questo caso si ha che anche il rango di $\hat{A}$ e' 3.

- Se il rango di A e' 2, allora B ha 2 righe non nulle; distinguiamo due sottocasi:

  – se $\hat{B}$ ha 3 righe non nulle, cioe' se il rango di $\hat{A}$ e' 3, allora

  $$\hat{B} = \left[\begin{array}{ccc|c} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \right],$$

  dove il simbolo $*$ indica il pivot della terza riga e i simboli ? indicano elementi qualsiasi.

  La terza equazione del sistema associato a $\hat{B}$ e'

  $$0x + 0y + 0z = *,$$

  dunque il sistema associato a $\hat{B}$ e' impossibile, cosi' anche il sistema associato a $\hat{A}$ e' impossibile.

– se $\hat{B}$ ha 2 righe non nulle, cioe' se il rango di $\hat{A}$ e' 2, allora $\hat{B}$ e' di uno dei seguenti tre tipi:

$$\hat{B} = \left[\begin{array}{ccc|c} * & ? & ? & ? \\ 0 & * & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$\hat{B} = \left[\begin{array}{ccc|c} * & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & * & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$\hat{B} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & * & ? & ? \\ 0 & 0 & * & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

dove i simboli $*$ indicano i pivot delle prime due righe e i simboli ? indicano elementi qualsiasi.

In ciascuno di questi tre casi, il sistema associato a $\hat{B}$ ha infinite soluzioni, cosi' anche il sistema associato a $\hat{A}$ ha infinite soluzioni.

Precisamente, le soluzioni sono, rispettivamente, del tipo

$$\begin{cases} x &= b_1 & +c_1 z \\ y &= b_2 & +c_2 z \\ z &= & \textit{variabile libera} \end{cases},$$

$$\begin{cases} x &= b_1 & +c_1 y \\ z &= b_2 & \\ y &= & \textit{variabile libera} \end{cases},$$

$$\begin{cases} y &= b_1 & \\ z &= b_2 & \\ x &= & \textit{variabile libera} \end{cases}$$

- La discussione dei casi restanti, in cui il rango di A e' 1 oppure 0, non viene riportata.

Proprieta' 10.2 (Teorema di Rouche'-Capelli) Un sistema di m equazioni lineari in n incognite con matrice dei coefficienti A e matrice aumentata $\hat{A}$ e' possibile se e solo se

$$\textit{rango di } A \;=\; \textit{rango di } \hat{A}.$$

In tal caso, se il rango di A e' n, allora il sistema e' determinato; se il rango di A e' $p < n$, allora il sistema e' indeterminato: si hanno p variabili fondamentali ed $n - p$ variabili libere (ci sono ∞^p soluzioni); di piu', le variabili fondamentali dipendono dalle variabili libere in modo lineare.

Proprieta' 10.10 Il generico sistema lineare di m equazioni in n incognite con matrice dei coefficienti A e termini noti $b_1, \ldots, b_m$ ha una ed una sola soluzione per ogni scelta di $b_1, \ldots, b_m$ se e solo se

$$m = rango\ di\ A\ =\ n.$$