08.03.05

Argomenti svolti: rappresentazioni formali di matrici; definizione di addizione fra matrici, di moltiplicazione di una matrice per un numero reale, con descrizione delle loro proprieta'; definizione di prodotto di matrici, e suo uso per rappresentare sistemi lineari; matrici unita' e loro proprieta'. Tutti questi argomenti si possono trovare nel capitolo 11 "Algebra delle matrici", sezione 11.1 "Algebra delle matrici", sottosezioni "Addizione, Sottrazione, Moltiplicazione per uno scalare, Moltiplicazione di matrici, Sistemi di equazioni in forma matriciale". Di seguito vengono riportati alcuni passaggi della lezione che si discostano dalla trattazione del libro.

La generica matrice $A$ di tipo $m \times n$ si puo' rappresentare nella forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

oppure piu' sinteticamente come

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}} .$$

Ad esempio, la matrice quadrata di ordine $n$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avente gli elementi sulla diagonale discendente uguali a 1 e tutti gli altri uguali a 0, si puo' rappresentare sinteticamente come

$$I = [\delta_{ij}]_{\substack{i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,n}} ,$$

dove $\delta_{ij} = 1$ per $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ per $i \neq j$. Questa matrice viene detta matrice unita' di ordine $n$.

Siano $R = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$ una matrice riga e $C = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ una matrice colonna colonna aventi lo stesso numero di elementi. Il prodotto della matrice riga $R$ per la matrice colonna $C$ e' il numero definito da

$$RC = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1,2,\cdots,n} a_i b_i.$$

**Esempio** L'equazione lineare nelle tre variabili numeriche $x, y, z$

$$x + 2y + 3z = 4$$

si puo' rappresentare come

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 4$$

e dunque, ponendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, si puo' pensare come l'equazione

$$AX = 4$$

nella variabile matriciale $X$.

Siano $A$ una matrice di tipo $m \times n$ e $B$ una matrice di tipo $n \times p$. La tabella dei prodotti della varie righe di $A$ per le varie colonne di $B$ e' una matrice di tipo $m \times p$, che viene detta matrice prodotto di $A$ per $B$, e viene indicata con $AB$. Indicando le righe di $A$ con $R_1, R_2, \dots, R_m$ e le colonne di $B$ con $C_1, C_2, \dots, C_p$, si ha dunque

$$AB = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 & \dots & R_1C_p \\ R_2C_1 & R_2C_2 & \dots & R_2C_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_mC_1 & R_mC_2 & \dots & R_mC_p \end{bmatrix}.$$

Da un altro punto di vista, ponendo

$$A = [A_{ij}]_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}}, \quad B = [B_{jk}]_{\substack{j=1,2,\dots,n \\ k=1,2,\dots,p}}, \quad AB = [(AB)_{ik}]_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ k=1,2,\dots,p}},$$

si ha

$$(AB)_{ik} = \begin{bmatrix} A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1k} \\ B_{2k} \\ \vdots \\ B_{nk} \end{bmatrix} = \sum_{j=1,2,\dots,n} A_{ij} B_{jk}.$$

Si verifica che, indicata con $I$ la matrice unita' di ordine $n$, per ogni matrice $A$ di tipo $m \times n$ ed ogni matrice $B$ di tipo $n \times p$ si ha

$$AI = A, \quad IB = B.$$

11.03.05

**Esercizio.** Date le matrici

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

si verifichi che

$$(XA)Y = X(AY) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 4x_2y_2.$$

**Fatto.** In generale, comunque siano prese una matrice riga $X$ di tipo $1 \times m$, una matrice $A$ di tipo $m \times n$, e una matrice colonna $Y$ di tipo $n \times 1$,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

si ha che,

$$(XA)Y = X(AY) = \sum_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}} x_i a_{ij} y_j.$$

**Teorema** Il prodotto di matrici e' associativo: comunque siano prese una matrice $A$ di tipo $m \times n$, una matrice $B$ di tipo $n \times p$, e una matrice $C$ di tipo $p \times q$,

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}}, \quad B = [b_{jh}]_{\substack{j=1,2,\dots,n \\ h=1,2,\dots,p}}, \quad C = [c_{hl}]_{\substack{h=1,2,\dots,p \\ l=1,2,\dots,q}},$$

si ha che i due modi di moltiplicare, nell'ordine, $A, B$ e $C$ danno lo stesso risultato:

$$(AB)C = A(BC).$$

Questo risultato comune si indica in breve con $ABC$, ed e' una matrice di tipo $m \times q$. L'elemento di posto $(i, l)$ nella matrice prodotto $ABC$ e' dato da

$$(ABC)_{il} = \sum_{\substack{j=1,2,\dots,m \\ h=1,2,\dots,n}} a_{ij} b_{jh} c_{hl},$$

per ogni $i = 1, 2, \ldots, m$ e $l = 1, 2, \ldots, q$.

Il prodotto di matrici permette di esprimere sinteticamente il modo nel quale alcune variabili dipendono linearmente da altre variabili e permette di trattare sinteticamente il processo di sostituzione lineare di variabili. Siano date, ad esempio, due variabili $x_1, x_2$ che dipendono linearmente da tre variabili $y_1, y_2, y_3$ secondo la legge

$$\left\{ \begin{array}{rcrrr} x_1 & = & y_1 & -2y_2 & +2y_3 \\ x_2 & = & y_1 & +2y_2 & -2y_3 \end{array} \right. ,$$

che a loro volta dipendono linearmente da quattro variabili $z_1, z_2, z_3, z_4$ secondo la legge

$$\left\{ \begin{array}{rcrrrr} y_1 & = & 4z_1 & +3z_2 & +2z_3 & +z_4 \\ y_2 & = & z_1 & +z_2 & +z_3 & +z_4 \\ y_1 & = & z_1 & +2z_2 & +3z_3 & +4z_4 \end{array} \right. .$$

Nelle uguaglianze che esprimono le 2 variabili $x$ in funzione delle 3 variabili $y$ possiamo allora sostituire a ciascuna variabile $y_1, y_2$ e $y_3$ la sua espressione in funzione delle 4 variabili $z_1, z_2, z_3, z_4$, ottenendo uguaglianze che esprimono le 2 variabili $x$ in funzione delle 4 variabili $z$. Questo processo puo' essere sintetizzato ed effettuato nel modo seguente.

Le due uguaglianze che esprimono le variabili $x$ in funzione delle $y$ possono essere sintetizzate nell'unica uguaglianza fra matrici

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + 2y_3 \\ y_1 + 2y_2 - 2y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & +2 \\ 1 & +2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

che a sua volta, ponendo

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & +2 \\ 1 & +2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

si puo' sintetizzare in

$$X = AY.$$

Analogamente, le tre uguaglianze che esprimono le variabili $y$ in funzione delle $z$ possono essere sintetizzate nell'unica uguaglianza fra matrici

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4z_1 + 3z_2 + 2z_3 + z_4 \\ z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \\ z_1 + 2z_2 + 3z_3 + 4z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix},$$

che a sua volta, ponendo

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix},$$

si puo' sintetizzare in

$$Y = BZ.$$

Nella uguaglianza che esprime la variabile matriciale $X$ in funzione della variabile matriciale $Y$ possiamo allora sostituire a $Y$ la sua espressione in funzione della variabile matriciale $Z$, ottenendo un'uguaglianza che esprime $X$ in funzione di $Z$ :

$$X = AY = A(BZ) = (AB)Z.$$

Dunque le 2 variabili $x$ dipendono linearmente dalle 4 variabili $z$, e la matrice $2 \times 4$ dei coefficienti delle espressioni delle $x$ in funzione delle $z$ e' il prodotto della matrice $2 \times 3$ dei coefficienti delle espressioni delle $x$ in funzione delle $y$ per la matrice $3 \times 4$ dei coefficienti delle espressioni delle $y$ in funzione delle $z$ :

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & -2 & -5 \end{bmatrix},$$

e si ha

$$\begin{cases} x_1 = 4z_1 + 5z_2 + 6z_3 + 7z_4 \\ x_2 = 4z_1 + z_2 - 2z_3 - 5z_4 \end{cases}.$$

A volte, i due modi di calcolare un prodotto di tre matrici possono avere complessita' di calcolo nettamente differenti. Ad esempio, si ha

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 40 \\ 60 \end{bmatrix},$$

mentre

$$\left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 40 \\ 60 \end{bmatrix}.$$

Il prodotto di matrici non e' commutativo (cfr ...) Ad esempio si ha:

$$\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 2p \\ 3q & 4q \end{bmatrix},$$

mentre

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 2q \\ 3p & 4q \end{bmatrix}.$$

**Esercizio.** Sono date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Si verifichi che i seguenti due processi portano allo stesso risultato: scambiare le due righe di $A$ e poi moltiplicare la matrice cosi' ottenuta per la matrice $B$; moltiplicare la matrice $A$ per la matrice $B$ e poi scambiare le due righe della matrice prodotto $AB$. Analogamente, si verifichi che i seguenti due processi portano allo stesso risultato: moltiplicare per 3 la seconda riga di $A$ e poi moltiplicare la matrice cosi' ottenuta per la matrice $B$; moltiplicare la matrice $A$ per la matrice $B$ e poi moltiplicare per 3 la seconda riga della matrice prodotto $AB$.

**Fatto.** Siano date un'operazione elementare per righe, una matrice $A$ ed una matrice $B$, tali che abbia senso applicare l'operazione elementare ad $A$ ed esista il prodotto $AB$. Allora i seguenti due processi portano allo stesso risultato: trasformare $A$ mediante l'operazione elementare e poi moltiplicare la matrice cosi' ottenuta per la matrice $B$; moltiplicare la matrice $A$ per la matrice $B$ e poi trasformare la matrice prodotto $AB$ mediante l'operazione elementare.

Dato un intero positivo $n$, ad ogni operazione elementare su $n$ righe si puo' associare la matrice ottenuta trasformando con tale operazione elementare la matrice unita' $I$ di ordine $n$. Le matrici cosi' ottenute vengono dette matrici elementari (cfr ...). Ad esempio, dato $n = 2$, le operazioni elementari: scambiare la prima riga con la seconda, moltiplicare la prima riga per $k \neq 0$, sommare alla seconda riga la prima riga moltiplicata per $h$, si possono associare le seguenti matrici elementari

$$E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_1(k) = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_{21}(h) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{bmatrix},$$

ottenute trasformano la matrice unita' $I$ di ordine 2 mediante tali operazioni elementari.

**Proposizione.** Siano date un'operazione elementare su $n$ righe, la corrispondente matrice elementare $E$ ed una matrice $A$ di tipo $m \times n$. Allora si ha che: moltiplicare la matrice elementare $E$ per $A$ equivale a trasformare la matrice $A$ mediante l'operazione elementare.

Infatti si ha che: "moltiplicare la matrice elementare $E$ per $A$" significa "trasformare la matrice unita' $I$ mediante l'operazione elementare e poi moltiplicare la matrice cosi' ottenuta per la matrice $A$," che, per il fatto generale sopra stabilito, equivale a "moltiplicare la matrice unita' $I$ per la matrice $A$ e poi trasformare la matrice prodotto $IA = A$ mediante l'operazione elementare", cioe' "trasformare la matrice $A$ mediante l'operazione elementare".