15.03.05

Questa lezione fa sostanzialmente riferimento alla sezione 11.4 "Algebra delle matrici quadrate", pp.259-263. Piu' precisamente, si sono svolti i seguenti argomenti:

- definizione di matrice inversa di una matrice quadrata; teorema 11.5 (con dimostrazione): una matrice quadrata puo' avere al piu' una inversa;
- teorema 11.6 (con dimostrazione): se una matrice quadrata A e' invertibile, allora e' non singolare, e l'unica soluzione di un qualunque sitema lineare del tipo $Ax = b$ e' $x = A^{-1}b$;
- teorema 11.7 (con dimostrazione): se una matrice A quadrata di ordine n e' non singolare, allora e' invertibile;
- procedura per determinare la matrice inversa di una matrice non singolare A (cfr. Esempio 11.3): si consideri la matrice $[A|I]$, la si trasformi mediante operazioni elementari per righe fino ad ottenere una matrice $[S|B]$, con S matrice a scala ridotta, allora $S = I$ e $B = A^{-1}$.

18.03.05

Esercizio. La seguente matrice e' invertibile?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & -9 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sappiamo che una matrice quadrata e' invertibile se e solo se e' non singolare, e che una matrice quadrata di ordine n e' non singolare se e solo se ha rango n. Ora, applicando l'algoritmo di Gauss ad A si ottiene la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dunque il rango di A e' 2, ed A non e' invertibile.

Esercizio. Sono date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & -9 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinare l'inversa di A e risolvere le equazioni matriciali

$$AX = B, \quad XA = B,$$

nella matrice incognita X quadrata di ordine 3.

Per determinare l'inversa della matrice A consideriamo la matrice

$$[A|I] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

applichiamole l'algoritmo di Gauss-Jordan, ottenendo la matrice

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] = [I|A^{-1}].$$

Consideriamo ora l'equazione matriciale $AX = B$; moltiplicando entrambi i membri a sinistra per A^{-1} si ottiene $X = A^{-1}B$, e si verifica che questa e' davvero una soluzione dell'equazione; dunque l'equazione matriciale $AX = B$ ha una ed una sola soluzione, data da

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Consideriamo ora l'equazione matriciale $XA = B$; moltiplicando entrambi i membri a destra per A^{-1} si ottiene $X = BA^{-1}$, e si verifica che questa e' davvero una soluzione dell'equazione; dunque l'equazione matriciale $XA = B$ ha una ed una sola soluzione, data da

$$X = BA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Le considerazioni emerse nella soluzione del precedente esercizio hanno portata generale:

Proposizione *Sia A una matrice quadrata di ordine n invertibile. Allora:*

- *per ogni matrice B di tipo $n \times p$, l'equazione matriciale $AX = B$ ha una ed una sola soluzione: $X = A^{-1}B$;*
- *per ogni matrice C di tipo $q \times n$, l'equazione matriciale $XA = C$ ha una ed una sola soluzione: $X = CA^{-1}$.*

Proprieta' dell'operazione di inversione (cfr. Teorema 11.10) Siano A e B matrici quadrate dello stesso ordine invertibili. Allora anche A^{-1} e AB sono invertibili, e

$$(A^{-1})^{-1} = A, \qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Piu' in generale, se $A_1, A_2, \ldots, A_p$ sono matrici quadrate dello stesso ordine invertibili, allora anche la matrice $A_1A_2\cdots A_p$ loro prodotto e' invertibile, e $(A_1A_2\cdots A_p)^{-1} = A_p^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

Cosi' come nell'insieme dei numeri reali, anche nell'insieme M_n delle matrici quadrate di ordine n si definiscono le potenze ad esponente naturale: per ogni matrice A in M_n ed ogni $p = 0, 1, 2, \ldots$, la matrice A^p potenza $p-$ma di A viene definita da

$$A^p = \begin{array}{ll} AA\cdots A \; p \; volte & per \; p > 0 \\ I & per \; p = 0 \end{array}$$

Si verifica che valgono le seguenti proprieta' delle potenze:
$A^pA^q = A^{p+q}$;
$(A^p)^q = A^{pq}$;
$(AB)^p = A^pB^p$, *sotto la condizione* $AB = BA$.
Si verifichi che, per $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ si ha $(AB)^2 \neq A^2B^2$.

Si osserva che le matrici multipli scalari della matrice unita' di ordine n

$$cI = \begin{bmatrix} c & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & c & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & c & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & c \end{bmatrix}$$

sono permutabili con ogni altra matrice in M_n. Si segnala che le matrici multipli scalari della matrice unita' di ordine n sono le uniche ad essere permutabili con ogni altra matrice in M_n.

Cosi' come nell'insieme dei numeri reali, anche nell'insieme M_n delle matrici quadrate di ordine n si definiscono le potenze ad esponente intero relativo: per ogni matrice invertibile A in M_n ed ogni $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, la matrice A^p potenza $p-$ma di A viene definita da

$$A^p = \begin{array}{ccc} AA\cdots A & p \; volte & per \; p > 0 \\ I & & per \; p = 0 \\ A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1} & -p \; volte & per \; p < 0 \end{array}$$

Ad esempio, per
$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$
si ha
$A^{-3} = (A^{-1})^3 = \begin{bmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1 & -1110 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}.$

Si verifica che per le potenze ad esponente intero relativo valgono le proprieta' sopra enunciate per le potenze ad esponente naturale.