22.03.05

Proprieta' distributive della molttiplicazione rispetto all'addizione:

$$(A + A')B = AB + A'B, \quad A(B + B') = AB + AB',$$

per ogni A, A', B, B' matrici per le quali le operazioni siano definite. Si suggerisce di verificare queste proprieta' nel caso in cui A e A' siano matrici riga e B e B' siano matrici colonna; da questo caso particolare segue il caso generale.

Nell'insieme M_n delle matrici quadrate di un assegnato ordine n sono state dunque definite le operazioni di addizione e moltiplicazione; per $n = 1$, l'insieme M_n e' l'insieme R dei numeri reali, e queste operazioni sono le usuali operazioni coi numeri reali; per $n > 1$, la moltiplicazione non e' piu' commutativa, e cio'comporta che le identita' notevoli del calcolo algebrico coi numeri reali non sono piu' valide per il calcolo algebrico con le matrici. Ad esempio si ha

$$(A + B)(A - B) = A(A - B) + B(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2,$$

e dunque

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 \quad \textit{se e solo se} \quad AB = BA.$$

Analogamente, si ha

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

e dunque

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad \textit{se e solo se} \quad AB = BA.$$

In ogni caso, quando le matrici in gioco sono permutabili, tutti i prodotti notevoli continuano a valere; ad esempio, sotto la condizione $AB = BA$, vale il teorema binomiale

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} A^k B^{n-k},$$

e vale sempre, per ogni numero reale c,

$$(cI + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} c^k B^{n-k}.$$

Usando le matrici e le operazioni definite su di esse si possono agevolmente verificare proprieta' dei sistemi lineari. Ad esempio, sappiamo che se un sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ di m equazioni in n incognite possiede piu' di una soluzione, allora ne possiede infinite; usando il calcolo matriciale, possiamo stabilire una costruzione che, a partire da due soluzioni distinte del sistema, prosuce infinite soluzioni del sistema.

Proposizione *E' dato un sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ di m equazioni in n incognite che possiede due soluzioni distinte $\underline{s}'$ ed $\underline{s}''$, cioe' due diverse matrici colonna $n \times 1$ tali che $A\underline{s}' = \underline{b}, \quad A\underline{s}'' = \underline{b}$. Allora l'espressione*

$$\underline{s} = t\underline{s}' + (1-t)\underline{s}''$$

fornisce, al variare di t fra i numeri reali, infinite matrici colonna che sono soluzione del sistema.

Infatti

$$\begin{aligned} A\underline{s} &= A(t\underline{s}' + (1-t)\underline{s}'') \\ &= At\underline{s}' + A(1-t)\underline{s}'' \\ &= tA\underline{s}' + (1-t)A\underline{s}'' \\ &= t\underline{b} + (1-t)\underline{b} = \underline{b}. \end{aligned}$$

Leggendo per righe gli elementi di una matrice A di tipo $m \times n$ e trascrivendoli per colonne si ottiene una matrice di tipo $n \times m$, che viene detta la trasposta di A, ed indicata con A^T. Ad esempio, si ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = A^T.$$

Sinteticamente, si ha

$$A = [A_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}, \quad [A_{ji}]_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=1,\dots,m}} = A^T.$$

L'operazione di trasposizione ha le seguenti proprieta' rispetto alle altre operazioni:

$(A^T)^T = A$
$(A+B)^T = A^T + B^T$
$(cA)^T = cA^T$
$(AB)^T = B^T A^T$.

Quest'ultima identita' e' il Teorema 11.1, che e' enunciato e dimostrato a p.252.

E' intuitivamente chiaro che i termini "riga" e "colonna" svolgono ruoli intercambiabili nella teoria delle matrici, dunque, in particolare, per ogni nozione data "per righe" si ha una corrispondente nozione "per colonne", e per ogni risultato nei termini delle nozioni "per righe" si ha un corrispondente risultato nei termini delle nozioni "per colonne"; l'operazione di traposizione permette di descrivere con chiarezza questo processo.

Ad esempio, si possono definire le operazioni elementari per colonne, le matrici a scala o a scala ridotta per colonne; si puo' stabilire il fatto che ogni matrice si puo' trasformare, mediante operazioni elementari per colonne, in una matrice a scala o a scala ridotta per colonne; in altri termini si possono dare un algoritmo di Gauss ed uno di Gauss-Jordan per colonne.

Ora, abbiamo visto che le azioni delle operazioni elementari per righe e degli algoritmi di Gauss e Gauss-Jordan per righe si possono rappresentare attraverso moltiplicazioni per matrici elementari. Qal'e' il corrispondente risultato per colonne?

Per rispondere, basta "trasporre" i vari risultati ottenuti "per righe". Ad esempio, sappiamo che l'azione dell'operazione elementare su 2 righe "sommare alla seconda riga la prima riga moltiplicata per h" e' rappresentata dalla premoltiplicazione per la matrice elementare

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{bmatrix}$,

ottenuta applicando l'operazione elementare alla matrice unita' di ordine 2. Cio' e' espresso dall'identita'

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & \dots \\ d & e & f & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & \dots \\ d+ha & e+hb & f+hc & \dots \end{bmatrix}.$$

Ora, trasponendo entrambi i membri si ha

$$\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & d+ha \\ b & e+hb \\ c & f+hc \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

Questa identita' significa che l'azione dell'operazione elementare su 2 colonne "sommare alla seconda colonna la prima colonna moltiplicata per h" e' rappresentata dalla postmoltiplicazione per la matrice elementare

$\begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ottenuta applicando l'operazione elementare alla matrice unita' di ordine 2.

Al Teorema 11.4, che rappresenta nell'algebra delle matrici l'azione dell'algoritmo di Gauss-Jordan per righe

Per ogni matrice A esiste una matrice E prodotto di matrici elementari tale che $EA = S$, con S matrice a scala ridotta per righe.

corrisponde il Teorema

Per ogni matrice A esiste una matrice F prodotto di matrici elementari tale che $AF = T$, con T matrice a scala ridotta per colonne.

che rappresenta nell'algebra delle matrici l'azione dell'algoritmo di Gauss-Jordan per colonne.