26.04.05

Per ogni $n = 1, 2, \ldots$ fissato, consideriamo l'insieme R^n delle $n-$ple ordinate di numeri reali; ogni $n-$pla ordinata viene detta "vettore di R^n", e denotata con una lettera minuscola sottolineata; il termine "numero reale" viene spesso sostituito dal termine "scalare."

Sui vettori R^n sono definite le operazioni di addizione e moltiplicazione per scalari:

- il vettore $\underline{a} + \underline{b}$ somma dei vettori $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ viene definito componente per componente ponendo

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n).$$

  L'addizione di vettori di R^n gode delle usuali proprieta' dell'addizione di numeri reali: e' un'operazione associativa e commutativa; il ruolo del numero zero e' svolto dal vettore nullo $\underline{0} = (0, \ldots, 0)$.

- il vettore $r\ \underline{a}$ prodotto dello scalare r per il vettore $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ viene definito componente per componente ponendo

$$r\ \underline{a} = (ra_1, \ldots, ra_n).$$

L'insieme R^n, munito di queste operazioni, viene detto "spazio vettoriale R^n."

Ogni vettore di R^n puo' essere riguardato come una matrice riga di tipo $1 \times n$, oppure, come si preferisce di regola, come una matrice colonna di tipo $n \times 1$; in quest'ottica, si puo' osservare che le operazioni sopra definite sono sostanzialmente casi particolari dell'addizione di matrici e della moltiplicazione di numeri reali per matrici.

L'addizione di vettori di R^n e la moltiplicazione di vettori di R^n per scalari sono legate dalle seguenti proprieta':

$r(\underline{a} + \underline{b}) = r\underline{a} + r\underline{b}$

$(r + s)\underline{a} = r\underline{a} + s\underline{a}$

$r(s\underline{a}) = (rs)\underline{a}$

$1\underline{a} = \underline{a}$

per ogni $\underline{a}$, $\underline{b}$ vettori in R^n ed ogni r, s scalari in R.

Dati p vettori $\underline{v}_1,\ \underline{v}_2,\ \ldots,\ \underline{v}_p$ in R^n, comunque si eseguano su di essi ripetutamente operazioni di addizione e moltiplicazione per scalari, si ottiene un vettore di R^n che si puo' scrivere nella forma

$$c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + \ldots + c_p\underline{v}_p, \qquad c_i \in R.$$

Questa espressione viene detta *combinazione lineare dei vettori* $\underline{v}_1,\ \underline{v}_2,\ \ldots,\ \underline{v}_p$ *secondo i coefficienti, o pesi,* $c_1, c_2, \ldots, c_p$.

Nell'esercizio 3 della settimana scorsa viene posto il problema di rappresentare il vettore $\underline{u} = (7, 6)$ come combinazione lineare

$$x\underline{v} + y\underline{w} = \underline{u} \qquad x, y \in R$$

dei vettori $\underline{v} = (4, 1)$, $\underline{w} = (1, 2)$.

Il problema puo' essere risolto graficamente approssimativamente rappresentando un sistema di riferimento per il piano, rappresentando in tale sistema i tre vettori, ed effettuando la seguente costruzione: si conduca dal punto $\underline{u}$ la parallela alla retta individuata dal vettore $\underline{w}$ fino ad incontrare la retta individuata dal vettore $\underline{v}$ in un punto $\underline{v}'$; si conduca dal punto $\underline{u}$ la parallela alla retta individuata dal vettore $\underline{v}$ fino ad incontrare la retta individuata dal vettore $\underline{w}$ in un punto $\underline{w}'$; per costruzione si ha

$$\underline{v}' + \underline{w}' = \underline{u}.$$

Approssimativamente si puo' stimare che

$$\underline{v}' \cong 1.2\ \underline{v}, \quad \underline{w}' \cong 2.2\ \underline{w},$$

e dunque ottenere

$$\underline{u} \cong 1.2\ \underline{v} + 2.2\ \underline{w}.$$

Il fatto essenziale per questa costruzione e' che le rette individuate da $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono distinte; si puo' inoltre osservare che, in realta', ogni vettore del piano si potra' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei vettori $\underline{v}$ e $\underline{w}$.

Il problema puo' essere risolto esattamente algebricamente nel modo seguente. Stiamo cercando due numeri reali x e y tali che

$$x \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Possiamo dire che questa e' un'equazione nelle incognite x, y, con coefficienti e termine noto vettoriali. Svolgendo le operazioni si ottiene l'uguaglianza fra vettori

$$\begin{bmatrix} 4x + y \\ x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix},$$

che equivale alle due uguaglianze

$$\begin{cases} 4x & +y & = 7 \\ x & +2y & = 6 \end{cases}.$$

Questo e' un sistema lineare di due equazioni in due incognite, che ha una ed una sola soluzione: $x = 8/7$, $y = 17/7$.

Si noti che la matrice completa del sistema e'

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 6 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} \underline{v} & \underline{w} & \underline{u} \end{array}\right],$$

cioe' e' la matrice che ha per colonne i vettori $\underline{v}$, $\underline{w}$, $\underline{u}$.

In generale, dati dei vettori

$$\underline{v}_1,\ \underline{v}_2,\ \ldots,\ \underline{v}_p,\ \underline{v} \in R^n,$$

ci si puo' porre il problema di determinare tutte le eventuali scritture

$$x_1\underline{v}_1 + x_2\underline{v}_2 + \ldots + x_p\underline{v}_p = \underline{v}$$

del vettore $\underline{v}$ come combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_1,\ \underline{v}_2,\ \ldots,\ \underline{v}_p$.
Poniamo

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix},\ \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{bmatrix},\ \ldots,\ \underline{v}_p = \begin{bmatrix} v_{1p} \\ v_{2p} \\ \vdots \\ v_{np} \end{bmatrix},\ \underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Stiamo cercando p numeri reali $x_1, x_2, \ldots, x_p$ tali che

$$x_1 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + x_p \begin{bmatrix} v_{1p} \\ v_{2p} \\ \vdots \\ v_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Possiamo dire che questa e' un'equazione nelle incognite $x_1, x_2, \ldots, x_p$ con coefficienti e termine noto vettoriali. Svolgendo le operazioni si ottiene l'uguaglianza fra vettori

$$\begin{bmatrix} v_{11}x_1 + v_{12}x_2 + \cdots + v_{1p}x_p \\ v_{21}x_1 + v_{22}x_2 + \cdots + v_{2p}x_p \\ \vdots \\ v_{n1}x_1 + v_{n2}x_2 + \cdots + v_{np}x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix},$$

che equivale alle n uguaglianze

$$\begin{cases} v_{11}x_1 + v_{12}x_2 + \cdots + v_{1p}x_p = v_1 \\ v_{21}x_1 + v_{22}x_2 + \cdots + v_{2p}x_p = v_2 \\ \vdots \\ v_{n1}x_1 + v_{n2}x_2 + \cdots + v_{np}x_p = v_n \end{cases}.$$

Questo e' un sistema lineare di n equazioni in p incognite, che puo' essere sintetizzato nella forma

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1p} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

oppure

$$\begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \ldots & \underline{v}_p \end{bmatrix} \underline{x} = \underline{v},$$

dove $\underline{x}$ e' il vettore colonna dei pesi incogniti $x_1, \ldots, x_p$.

In R^n consideriamo i vettori

$\underline{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0)$
$\underline{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, 0)$
$\vdots$
$\underline{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1)$

che hanno una componente uguale a 1 e tutte le altre uguali a 0.
Osserviamo che ogni vettore $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di R^n si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei vettori $\underline{e}_1,\ \underline{e}_2,\ \ldots,\ \underline{e}_n$; infatti si ha

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, \ldots, 0) + \cdots + (0, 0, \ldots, x_n) \\ &= x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, \ldots, 0) + \cdots + x_n(0, 0, \ldots, 1),\end{aligned}$$

cioe'

$$\underline{x} = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + \cdots + x_n\underline{e}_n.$$

Definizione. *Diciamo che i vettori $\underline{v}_1,\ \underline{v}_2,\ \ldots,\ \underline{v}_p$ formano una base di R^n se e solo se ogni vettore $\underline{v}$ di R^n si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare*

$$\underline{v} = x_1\underline{v}_1 + x_2\underline{v}_2 + \cdots + x_p\underline{v}_p$$

dei vettori $\underline{v}_1,\ \underline{v}_2,\ \ldots,\ \underline{v}_p$. Il peso x_i viene detto coordinata di $\underline{v}$ rispetto all'$i-$mo vettore della base.

Per quanto sopra osservato, possiamo dire che i vettori $\underline{e}_1,\ \underline{e}_2,\ \ldots,\ \underline{e}_n$ formano una base di R^n, la base *canonica* di R^n. Le coordinate di un vettore rispetto alla base canonica sono le sue componenti.

L'esercizio sopra svolto porta ad affermare che in R^2 due qualsiasi vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ che non stiano sulla stessa retta formano una base per R^2.

Teorema. *Tutte le basi di R^n sono formate da n vettori.*

Dimostrazione I vettori $\underline{v}_1, \ \underline{v}_2, \ \dots, \ \underline{v}_p$ formano una base di R^n se e solo se ogni vettore $\underline{v}$ di R^n si puo' scrivere in uno ed un solo modo come loro combinazione lineare

$$x_1\underline{v}_1 + x_2\underline{v}_2 + \cdots + x_p\underline{v}_p = \underline{v}.$$

Per quanto osservato in precedenza, cio' capita se e solo se, per ogni vettore $\underline{v}$ di R^n, il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \dots & \underline{v}_p \end{bmatrix} \underline{x} = \underline{v},$$

dove $\underline{x}$ e' il vettore colonna dei pesi incogniti $x_1, \dots, x_p$, ha una ed una sola soluzione, cioe' la matrice $n \times p$

$$\begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \dots & \underline{v}_p \end{bmatrix}$$

e' non singolare. Abbiamo visto in precedenza che cio' capita se e solo se la matrice e' quadrata, cioe' $n = p$, e di rango n.