

10.05.05

**Definizione** I vettori  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$  dello spazio vettoriale  $R^n$  si dicono linearmente indipendenti se e solo se c'è un solo modo di ottenere il vettore nullo  $\underline{0}$  come loro combinazione lineare: prendere tutti i vettori con peso nullo. Sinteticamente:

$$x_1\underline{v}_1 + x_2\underline{v}_2 + \dots + x_m\underline{v}_m = \underline{0} \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0.$$

In caso contrario, cioè se si può ottenere il vettore nullo  $\underline{0}$  come loro combinazione lineare prendendo qualche vettore con peso non nullo, i vettori  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$  si dicono linearmente dipendenti.

### Esempi

1. Due qualsiasi vettori  $\underline{v}_1, \underline{v}_2$  non nulli di  $R^3$ , tali che nessuno dei due stia sulla retta individuata dall'altro, sono linearmente indipendenti.
2. Sono dati i vettori  $\underline{v}_1 = (1, 2, 3)$ ,  $\underline{v}_2 = (4, 5, 6)$ ,  $\underline{v}_3 = (7, 8, 9)$  nello spazio  $R^3$ . Si può osservare che il terzo vettore è combinazione lineare dei primi due:

$$\underline{v}_3 = -\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2.$$

Ora, questa relazione si può riscrivere nella forma

$$\underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 + \underline{v}_3 = \underline{0}.$$

Questa è una combinazione lineare dei tre vettori dati il cui risultato è il vettore nullo, e nella quale qualche peso (in realtà tutti) è non nullo, dunque i tre vettori dati sono linearmente dipendenti.

3. I vettori  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$  della base canonica di  $R^n$  sono linearmente indipendenti, e lo stesso vale per un qualsiasi sottinsieme di questi vettori.
4. In  $R^2$  consideriamo i tre vettori

$$\underline{v}_1 = (12, 15), \underline{v}_2 = (7, 23), \underline{v}_3 = (9, -3),$$

e ci chiediamo se sono linearmente indipendenti. Consideriamo le combinazioni lineari

$$x_1\underline{v}_1 + x_2\underline{v}_2 + x_3\underline{v}_3 = \underline{0},$$

dei tre vettori il cui risultato è il vettore nullo, cioè

$$x_1(12, 15) + x_2(7, 23) + x_3(9, -3) = (0, 0).$$

Svolgendo i conti ed uguagliando componente per componente si ottiene il sistema lineare omogeneo di due equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} 12x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 0 \\ 15x_1 + 23x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} .$$

Poiche' il numero di equazioni e' minore del numero di incognite, il sistema ha infinite soluzioni. Dunque ci sono infiniti modi per ottenere il vettore nullo come combinazione lineare dei vettori dati, cioe' i vettori dati sono linearmente dipendenti.

5. Siano  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$  le righe della matrice a scala per righe

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Le prime tre righe della matrice sono linearmente indipendenti. Ci se ne puo' rendere conto come segue. Consideriamo la generica combinazione lineare di tali righe il cui risultato sia il vettore nullo

$$x_1\underline{v}_1 + x_2\underline{v}_2 + x_3\underline{v}_3 = \underline{0},$$

cioe'

$$\begin{aligned} &x_1(1, 2, 4, 6) + \\ &x_2(0, 3, 5, 7) + \\ &x_3(0, 0, 0, 8) = \\ &(0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Uguagliando la prima componente del vettore al primo membro con la prima componente del vettore al secondo membro si ottiene  $x_1 = 0$ ; dunque si deve avere

$$\begin{aligned} &x_2(0, 3, 5, 7) + \\ &x_3(0, 0, 0, 8) = \\ &(0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Uguagliando la seconda componente del vettore al primo membro con la seconda componente del vettore al secondo membro si ottiene  $3x_2 = 0$ , cioe'  $x_2 = 0$ ; dunque si deve avere

$$\begin{aligned} &x_3(0, 0, 0, 8) = \\ &(0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

da cui si ottiene  $8x_3 = 0$ , cioe'  $x_3 = 0$ .

In definitiva, tutti i pesi devono essere nulli.

Osserviamo che l'insieme di tutte le righe e' linearmente dipendente, in quanto

$$0\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2 + 0\underline{v}_3 + 1\underline{v}_4 = \underline{0}.$$

In generale, si verifica che in ogni matrice a scala per righe le righe non nulle sono linearmente indipendenti.

6. Siano  $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4$  le colonne della matrice a scala ridotta per righe

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le colonne in cui compaiono i pivot, cioe'  $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_4$  sono i primi tre vettori della base canonica di  $R^4$ , dunque sono linearmente indipendenti.

In generale, si ha che in ogni matrice a scala ridotta per righe le colonne in cui compaiono i pivot sono linearmente indipendenti.

### Proposizione

- Un insieme di  $m \geq 2$  vettori  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$  di  $R^n$  e' linearmente dipendente se e solo se fra di essi ce n'e' almeno uno che e' combinazione lineare dei rimanenti.
- Un insieme di  $m \geq 2$  vettori  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$  di  $R^n$  e' linearmente indipendente se e solo se nessuno di essi e' combinazione lineare dei rimanenti.

Infatti, se uno dei vettori, ad esempio  $\underline{v}_m$ , si puo' scrivere come combinazione lineare

$$\underline{v}_m = c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + \dots + c_{m-1}\underline{v}_{m-1}$$

dei rimanenti, allora si ha

$$-c_1\underline{v}_1 - c_2\underline{v}_2 - \dots - c_{m-1}\underline{v}_{m-1} + \underline{v}_m = \underline{0},$$

cioe' il vettore nullo si puo' scrivere come combinazione lineare dei vettori dati prendendo  $\underline{v}_m$  con peso non nullo, in realta' 1, dunque i vettori  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$  sono linearmente dipendenti.

Viceversa, se i vettori  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$  sono linearmente dipendenti, cioe' se esiste una loro combinazione lineare il cui risultato e' il vettore nullo

$$x_1\underline{v}_1 + \dots + x_i\underline{v}_i + \dots + x_m\underline{v}_m = \underline{0}$$

in cui un certo vettore  $\underline{v}_i$  compare con peso  $x_i \neq 0$ , allora si puo' ricavare quel vettore come combinazione lineare dei rimanenti:

$$\underline{v}_i = -\frac{x_1}{x_i}\underline{v}_1 - \dots - \frac{x_{i-1}}{x_i}\underline{v}_{i-1} - \frac{x_{i+1}}{x_i}\underline{v}_{i+1} - \dots - \frac{x_m}{x_i}\underline{v}_m.$$

**Proposizione** *Se i vettori  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$  di  $R^n$  sono linearmente indipendenti, allora ogni vettore  $\underline{v}$  di  $R^n$  si puo' scrivere in al piu' un modo come loro combinazione lineare.*

Infatti, date due scritte di uno stesso vettore  $\underline{v}$  di  $R^n$  come combinazione lineare

$$\underline{v} = x_1\underline{v}_1 + x_2\underline{v}_2 + \dots + x_m\underline{v}_m$$

$$\underline{v} = y_1\underline{v}_1 + y_2\underline{v}_2 + \dots + y_m\underline{v}_m$$

dei vettori dati, sottraendo membro a membro si ottiene

$$\underline{0} = (x_1 - y_1)\underline{v}_1 + (x_2 - y_2)\underline{v}_2 + \dots + (x_m - y_m)\underline{v}_m,$$

e l'indipendenza lineare dei vettori dati implica l'annullamento di tutti i pesi:

$$x_1 - y_1 = 0, x_2 - y_2 = 0, \dots, x_m - y_m = 0,$$

cioe'

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_m = y_m.$$

Abbiamo definito base di un sottospazio  $V$  di  $R^n$  un qualsiasi sottinsieme di vettori  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$  di  $V$  tale che ogni vettore di  $V$  si possa scrivere in uno ed un solo modo come loro combinazione lineare. Possiamo distinguere i due aspetti che compaiono in questa definizione.

Da una parte, si chiede che ogni vettore di  $V$  si possa scrivere in almeno un modo come combinazione lineare dei vettori  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$ , cioe' che il sottospazio  $\mathcal{L}[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m]$  da essi generato coincida con  $V$ ; cio' puo' essere espresso in breve dicendo che i vettori  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$  generano  $V$ .

Dall'altra, si chiede che ogni vettore di  $V$  si possa scrivere in al piu' un modo come combinazione lineare dei vettori  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$ , e cio' equivale, per la proposizione precedente, a chiedere che i vettori  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$  siano linearmente indipendenti.

Riassumendo, possiamo ridefinire la nozione di base come segue

**(Ri)Definizione** *Sia  $V$  un sottospazio di  $R^n$ . Diciamo che i vettori  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$  di  $V$  formano una base per  $V$  se e solo se*

- $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$  generano  $V$ .
- $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$  sono linearmente indipendenti.

In prima battuta, una procedura per determinare una base per il sottospazio

$V = \mathcal{L}[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m]$  generato dai vettori  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$  puo' essere data come segue.

Se i vettori  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$  sono linearmente indipendenti, allora essi formano una base di  $V$ ; altrimenti, uno di essi, per semplicita' supponiamo l'ultimo, e' combinazione lineare dei rimanenti, e si ha  $V = \mathcal{L}[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{m-1}]$ .

Ora, se i vettori  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{m-1}$  sono linearmente indipendenti, allora essi formano una base di  $V$ ; altrimenti, uno di essi, per semplicita' supponiamo l'ultimo, e' combinazione lineare dei rimanenti, e si ha  $V = \mathcal{L}[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{m-2}]$ .

Continuando in questo modo, in al piu'  $m$  passi si arrivera' a determinare un sottinsieme dell'insieme dei vettori  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$  che genera il sottospazio  $V$  ed e' linearmente indipendente, cioe' si arrivera' a determinare una base di  $V$ .

Ad esempio (cfr. es. 4 di settimana scorsa) possiamo considerare il sottospazio  $V = \mathcal{L}[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4, \underline{v}_5]$  di  $R^4$  generato dai vettori

$$\begin{aligned}\underline{v}_1 &= (1, 0, 0, 0), \\ \underline{v}_2 &= (0, 0, 1, 0), \\ \underline{v}_3 &= (1, 0, 1, 0), \\ \underline{v}_4 &= (1, 1, 1, 1), \\ \underline{v}_5 &= (0, 1, 0, 1).\end{aligned}$$

Si puo' osservare che  $\underline{v}_3 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$ , dunque si ha  $V = \mathcal{L}[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_4, \underline{v}_5]$ .

Ora, si puo' osservare che  $\underline{v}_4 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_5$  dunque si ha  $V = \mathcal{L}[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_5]$ .

Infine, si verifica che i vettori  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_5$  sono linearmente indipendenti, dunque essi formano una base di  $V$ .

In generale, quando non ci siano relazioni evidenti fra i vettori, la procedura appena descritta risulta piuttosto laboriosa; descriviamo ora su un esempio una procedura piu' efficiente, basata sull'algorithm di Gauss-Jordan.

Consideriamo il sottospazio  $V = \mathcal{L}[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4, \underline{v}_5]$  di  $R^4$  generato dai vettori

$$\begin{aligned}\underline{v}_1 &= (-1, 1, 1, 1), \\ \underline{v}_2 &= (1, -1, 1, 1), \\ \underline{v}_3 &= (3, -3, 1, 1), \\ \underline{v}_4 &= (1, 1, -1, 1), \\ \underline{v}_5 &= (0, 6, -4, 2).\end{aligned}$$

Riscriviamo i vettori  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4, \underline{v}_5$  come colonne e li accostiamo, ottenendo cosi' la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Applichiamo l'algoritmo di Gauss-Jordan a questa matrice, ed otteniamo la matrice a scala ridotta

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

le cui colonne indichiamo con  $\underline{v}'_1, \underline{v}'_2, \underline{v}'_3, \underline{v}'_4, \underline{v}'_5$ . Fra queste ci sono delle relazioni evidenti:

$$\begin{aligned} \underline{v}'_1, \underline{v}'_2, \underline{v}'_4 & \text{ sono linearmente indipendenti;} \\ \underline{v}'_3 & = -\underline{v}'_1 + 2\underline{v}'_2; \\ \underline{v}'_5 & = \underline{v}'_1 - 2\underline{v}'_2 + 3\underline{v}'_4. \end{aligned}$$

Ora, si ha il seguente fatto

- le operazioni elementari sulle righe di una matrice conservano tutte le relazioni del tipo "il vettore che compare nella colonna ... e' combinazione lineare dei vettori che compaiono nelle colonne ... con i coefficienti ...".

Poiche' le matrice  $A'$  e' stata ottenuta dalla matrice  $A$  tramite operazioni elementari per righe, si ha

$$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_4 \text{ sono linearmente indipendenti,}$$

e poiche' la matrice  $A$  si puo' riottenere dalla matrice  $A'$  tramite operazioni elementari per righe, si ha

$$\begin{aligned} \underline{v}_3 & = -\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2; \\ \underline{v}_5 & = \underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 + 3\underline{v}_4. \end{aligned}$$

Concludiamo che i vettori  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_4$  formano una base per il sottospazio  $V = \mathcal{L}[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4, \underline{v}_5]$ .

Non sempre un sottospazio e' assegnato mediante un insieme di generatori, ad esempio sia  $V$  il sottospazio di  $R^4$  costituito dalle soluzioni dell'equazione lineare omogenea

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

In questo caso, si puo' risolvere l'equazione esplicitando la prima incognita in funzione delle altre,  $x_1 = -x_2 - x_3 - x_4$ , e scrivere la soluzione generale dell'equazione come

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p - q - r \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dove  $p, q, r$  sono parametri liberi in  $R$ . Quest'ultima scrittura significa che le soluzioni dell'equazione sono tutte e sole le combinazioni lineari dei vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

in altri termini, che  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$  generano  $V$ ; d'altro canto si puo' osservare che questi tre vettori sono linearmente indipendenti, dunque essi formano una base per  $V$ .