Matematica II 20.02.06

1. Sappiamo che il *grafico* di una funzione

$$f : R \to R, \qquad x \mapsto f(x),$$

dalla retta reale R verso la stessa retta reale e' definito come l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali

$$(x, f(x)), \qquad x \in R$$

che costituisce, informalmente, una "linea" nel piano R^2. Da un altro punto di vista, il grafico della funzione f e' l'insieme delle soluzioni dalla equazione

$$y = f(x)$$

nelle due variabili x, y.

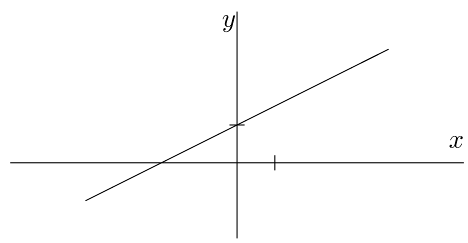
Esempio. Il grafico della funzione

$f(x) = 0.5x + 1,$

cioe' l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$y = 0.5x + 1,$

e' la retta di pendenza 0.5 passante per il punto $(0, 1)$:



2. In generale, il grafico di una *funzione lineare affine*, cioe' di una funzione del tipo

$$f(x) = mx + q, \qquad x \in R,$$

dove m, q sono costanti reali, cioe' l'insieme delle soluzioni dalla equazione

$$y = mx + q, \tag{1}$$

nelle due variabili x, y, e' una retta nel piano, precisamente la retta di pendenza m che passa per il punto $(0, q)$.

Quasi tutte le rette sono rappresentate da un'equazione del tipo (1): mancano le rette parallele all'asse delle y, rappresentate da equazioni del tipo

$$x = k,$$

con k costante reale.

Per potere rappresentare tutte le rette del piano, siamo cosi' condotti a considerare le equazioni del tipo

$$ax + by = c, \tag{2}$$

dove a, b, c sono costanti reali e a e b non sono entrambi nulli. Un'equazione di questo tipo viene detta *equazione lineare nelle variabili x e y*; le costanti a e b sono i coefficienti e c e' il termine noto dell'equazione. [1]

Osservazione A rette diverse corrispondono equazioni lineari diverse, ma puo' succedere che a due equazioni lineari diverse corrisponda la stessa retta. Ad esempio, a ciascuna delle due equazioni

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 1$

$3x + 2y = 6$

corrisponde la retta passante per i punti $(2, 0)$ e $(0, 3)$. In realta' si ha che a due equazioni

$a_1x + b_1y = c_1$

$a_2x + b_2y = c_2$

corrisponde la stessa retta se e solo se la terna (a_1, b_1, c_1) dei parametri della prima e' proporzionale alla terna (a_2, b_2, c_2) dei parametri della seconda, nel senso che esiste un numero reale k tale che

$a_1 = kb_1, \qquad a_2 = kb_2, \qquad a_3 = kb_3.$

3. **Esercizio**. Determinare il punto di intersezione delle rette r ed s rappresentate, rispettivamente, dalle equazioni

$$x + 3y = 4, \qquad 2x - 5y = -3.$$

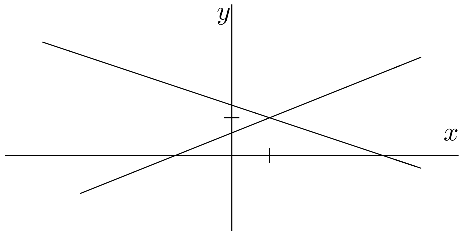
Si tratta di determinare la soluzione comune delle equazioni delle due rette, cioe' di risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + 3y &= 4 \\ 2x - 5y &= -3 \end{cases}.$$

[1] Per ragioni che emergeranno in seguito, e' ammesso anche il caso in cui tutti e due i coefficienti dell'equazione siano nulli.

Un sistema di questo tipo viene detto *sistema lineare* di due equazioni nelle incognite x, y.

Ci si puo' fare un'idea della soluzione del problema rappresentando le rette r ed s nel piano.



Si vede che le due rette non sono parallele e che si intersecano, approssimativamente, nel punto di coordinate $(1, 1)$. In realta', la coppia $(1, 1)$ e' una soluzione del sistema, come si verifica sostituendo $x = 1$ e $y = 1$ nelle equazioni del sistema, e dunque fornisce il punto di intersezione delle due rette. Un sistema che ammette come questo una ed una sola soluzione si dice *determinato*.

Dal punto di vista algebrico, il problema di risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 3y & = & 4 \\ 2x - 5y & = & -3 \end{cases}$$

si puo' affrontare in vari modi. Ad esempio, si puo' sommare alla seconda equazione la prima equazione moltiplicata per -2, ottenendo la nuova equazione

$$2x - 5y + (-2)(x + 3y) = -3 + (-2)(4), \qquad cioe' \quad -11y = -11,$$

e il nuovo sistema

$$\begin{cases} x + 3y & = & 4 \\ -11y & = & -11 \end{cases}.$$

Dalla seconda equazione si ricava

$y = 1;$

sostituendo questo valore nella prima equazione si ottiene l'equazione

$x + 3 = 4,$

dalla quale si ricava

$x = 1.$

Abbiamo cosi' ritrovato che il sistema lineare ha una ed una sola soluzione: la coppia ordinata $(1, 1)$.

4. **Commento**. Sommando alla seconda equazione del sistema

$$\begin{cases} x+3y &= 4 \\ 2x-5y &= -3 \end{cases}$$

la prima equazione moltiplicata per un numero reale k, si ottiene la nuova equazione

$$2x-5y+k(x+3y) = -3+k(4), \qquad cioe' \quad (2+k)x+(-5+3k)y = -3+4k,$$

e il nuovo sistema

$$\begin{cases} x & + & 3y & = & 4 \\ (2+k)x & + & (-5+3k)y & = & -3 + 4k \end{cases}.$$

Questo nuovo sistema ha sempre le stesse soluzioni del vecchio sistema; si e' scelto $k=-2$ per eliminare la variabile x dalla seconda equazione. Per questa ragione, il metodo di soluzione che abbiamo descritto viene detto *metodo di eliminazione.*

5. **Esercizio**. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x & + & \frac{1}{3}y & = & 1 \\ 3x & + & 2y & = & 6 \end{cases}.$$

Sappiamo che le due equazioni rappresentano la stessa retta, quindi il sistema avra' infinite soluzioni. Un sistema che ammette come questo infinite soluzioni si dice *indeterminato*; un sistema che non ammette alcuna soluzione si dice *impossibile.*

Risolviamo ora il sistema col metodo di eliminazione. Sommando alla seconda equazione la prima equazione moltiplicata per -6, si ottiene il nuovo sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x & + & \frac{1}{3}y & = & 1 \\ & & 0 & = & 0 \end{cases},$$

che si riduce all'unica equazione

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=1.$$

Siamo dunque arrivati a riconoscere che, come previsto, il sistema e' indeterminato.

6. **Esercizio**. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 6x & - & 4y & = & 1 \\ -9x & + & 6y & = & 1 \end{cases}.$$

7. Consideriamo ora una funzione

$$f : R^2 \to R, \qquad (x, y) \mapsto f(x, y),$$

dal piano reale R^2 alla retta reale R. Intuitivamente, rozzamente, possiamo pensare R^2 con i punti di questo foglio, e pensare che la funzione f associ ad ogni punto del foglio una "altezza".

Il *grafico* della funzione f e' definito come l'insieme delle terne ordinate di numeri reali

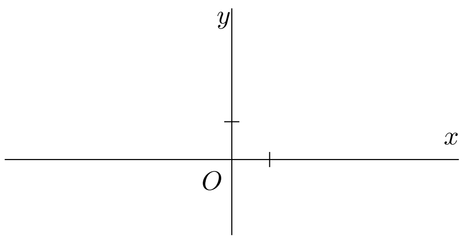
$$(x, y, f(x, y)) \quad (x, y) \in R^2,$$

che costituisce, informalmente, una "superficie" nello spazio. Da un altro punto di vista, il grafico della funzione f e' l'insieme delle soluzioni dalla equazione

$$z = f(x, y)$$

nelle tre variabili x, y, z.

Esempio Rozzamente, possiamo identificare il piano reale R^2 con la superficie di questo foglio, con il sistema di riferimento sotto indicato, e possiamo identificare lo spazio reale R^3 con lo spazio ordinario, con l'asse delle z passante per l'origine O di questo riferimento ed uscente perpendicolarmente dal foglio verso il lettore.



Il grafico della funzione costante

$f(x, y) = 2,$

cioe' l'insieme delle soluzioni dalla equazione

$$z = 2$$

nelle tre variabili x, y, z, puo' allora essere pensato come il piano parallelo al piano del foglio, che sta sopra del foglio di 2 unita' di misura.

8. Fra le funzioni reali di due variabli reale, le piu' semplici sono le *funzioni lineari affini*, cioe' quelle del tipo

$$f(x, y) = mx + ny + q, \qquad (x, y) \in R^2,$$

dove m, n, q sono costanti reali. Il grafico di una tale funzione f e' l'insieme delle soluzioni dalla equazione

$$z = mx + ny + q, \tag{3}$$

nelle tre variabili x, y, z. Questo insieme e' rappresentato da un piano nello spazio reale R^3, che passa per i punto $(0, 0, q)$; i parametri m ed n vengono detti "pendenze parziali" del piano.

Quasi tutti i piani dello spazio R^3 sono rappresentati da un'equazione del tipo (3): mancano i piani paralleli all'asse delle z, rappresentati da equazioni del tipo

$$px + qy = r,$$

con p, q, r costanti reali.

Per potere rappresentare tutti i piani dello spazio, siamo cosi' condotti a considerare le equazioni del tipo

$$ax + by + cz = d, \tag{4}$$

dove a, b, c, d sono costanti reali e a, b e c non sono tutti e tre nulli. Un'equazione di questo tipo viene detta *equazione lineare nelle variabili* x, y *e* z; le costanti a, b e c sono i coefficienti e d e' il termine noto dell'equazione. [2]

9. **Esercizio**. Determinare il punto di intersezione dei piani α, β e γ rappresentati, rispettivamente, dalle equazioni

$$x - 2y + 3z = 4, \quad 4x - 5y + 6z = 13, \quad 7x - 8y + 11z = 24.$$

Si tratta di determinare la soluzione comune delle equazioni dei tre piani, cioe' di risolvere il sistema lineare di tre equazioni in tre incognite

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x - 2y + 3z & = & 4 \\ 4x - 5y + 6z & = & 16 \\ 7x - 8y + 11z & = & 26 \end{array} \right. .$$

Il sistema si puo' risolvere col metodo di eliminazione modo seguente. Si puo' sommare alla seconda equazione la prima equazione moltiplicata per -4, e sommare alla terza equazione la prima equazione moltiplicata per -7, ottenendo cosi' il nuovo sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x - 2y + 3z & = & 4 \\ 3y - 6z & = & 0 \\ 6y - 10z & = & -2 \end{array} \right. .$$

[2] Per ragioni che emergeranno in seguito, e' ammesso anche il caso in cui tutti e tre i coefficienti dell'equazione siano nulli.

Ora si puo' sommare alla terza equazione la seconda equazione moltiplicata per -2, ottenendo cosi' il nuovo sistema

$$\begin{cases} x-2y+3z &= 4 \\ 3y-6z &= 0 \\ 2z &= -2 \end{cases}.$$

Dalla terza equazione si ricava

$z=-1.$

Sostituendo questo valore nella seconda equazione si ottiene l'equazione

$3y+6=0,$

dalla quale si ricava

$y=-2.$

Sostituendo i valori trovati per la z e la y nella prima equazione si ottiene l'equazione

$x+4-3=4,$

dalla quale si ricava

$x=3.$

Abbiamo cosi' ritrovato che il sistema e' determinato: la sua unica soluzione e' la terna ordinata $(3,-2,-1)$.

10. **Esercizio**. Risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} & y & +2z & = & 1 \\ x & +2y & & = & 0 \\ 2x & & +3z & = & 7 \end{cases}.$$

Non possiamo usare la prima equazione per eliminare la variabile x dalle altre due; possiamo scambiare allora la prima e la seconda equazione, ottenendo

$$\begin{cases} x & +2y & & = & 0 \\ & y & +2z & = & 1 \\ 2x & & +3z & = & 7 \end{cases}.$$

Ora si puo' proseguire come nell'esercizio precedente. Di seguito vengono riportati i passaggi, senza commento:

$$\begin{cases} x & +2y & & = & 0 \\ & y & +2z & = & 1 \\ & -4y & +3z & = & 7 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x & +2y & & = & 0 \\ & y & +2z & = & 1 \\ & & 11z & = & 11 \end{cases}.$$

$11z = 11 \qquad z = 1$

$y + 2 = 1 \qquad y = -1$

$x - 2 = 0 \qquad x = 2$

Abbiamo cosi' ritrovato che il sistema ha una ed una sola soluzione: la terna ordinata $(2, -1, 1)$.

11. **Commento**. Dato un qualsiasi sistema lineare di tre equazioni in tre incognite
$$\begin{cases} a_1x & +b_1y & +c_1z & = & d_1 \\ a_2x & +b_2y & +c_2z & = & d_2 \\ a_3x & +b_3y & +c_3z & = & d_3 \end{cases},$$
possiamo descrivere il processo di eliminazione nel modo seguente:

- se la variabile x compare con coefficiente non nullo in almeno una equazione, possiamo scambiare le equazioni in modo che la variabile x compaia con coefficiente non nullo nella prima equazione; possiamo poi usare la prima equazione per eliminare la variabile x dalla seconda e dalla terza equazione, ottenendo cosi' un sistema del tipo
$$\begin{cases} a'_1x & +b'_1y & +c'_1z & = & d'_1 \\ & b'_2y & +c'_2z & = & d'_2 \\ & b'_3y & +c'_3z & = & d'_3 \end{cases},$$
con $a'_1 \neq 0$;
- se la variabile y compare con coefficiente non nullo nella seconda o nella terza equazione, possiamo scambiare le equazioni in modo che la variabile y compaia con coefficiente non nullo nella seconda equazione; possiamo poi usare la seconda equazione per eliminare la variabile y dalla terza equazione, ottenendo cosi' un sistema del tipo
$$\begin{cases} a'_1x & +b'_1y & +c'_1z & = & d'_1 \\ & b''_2y & +c''_2z & = & d''_2 \\ & & c''_3z & = & d''_3 \end{cases},$$
con $a'_1 \neq 0$ e $b''_2 \neq 0$;
- se la variabile z compare con coefficiente non nullo nella terza equazione, cioe' se $c''_3 \neq 0$, allora possiamo ricavare la variabile z dalla terza equazione, poi possiamo ricavare la variabile y dalla seconda equazione, infine possiamo ricavare la variabile x dalla prima equazione.

Se tutte le condizioni sopra riportate sono soddisfatte, allora il sistema e' determinato. Viene naturale porsi la domanda: se una di queste condizioni non e' soddisfatta, ad esempio se la variabile x non compare in alcuna equazione, il sistema puo' essere determinato? Risponderemo nella prossima lezione.