Matematica II 24.02.06

1. Consideriamo di nuovo il problema di determinare il punto di intersezione delle rette $r:\ x+3y=4$ ed $s:\ 2x-5y=-3$, cioe' il problema di risolvere il sistema

$$\begin{cases} x+3y &= 4 \\ 2x-5y &= -3 \end{cases}.$$

I coefficienti delle variabili possono essere rappresentati dalla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Tutti i dati essenziali, coefficienti e termini noti, del sistema possono essere rappresentati dalla matrice

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & -3 \end{array}\right],$$

ottenuta affiancando alla *matrice dei coefficienti del sistema* A la colonna

$$b = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix},$$

dei termini noti. Questa matrice viene detta *matrice completa del sistema.*

Qui sotto riportiamo a sinistra la sequenza sistemi lineari prodotti dal processo di eliminazione e riportiamo a destra di ogni sistema lineare la sua matrice completa.

$$\begin{cases} x+3y &= 4 \\ 2x-5y &= -3 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & -3 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x+3y &= 4 \\ -11y &= -11 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -11 & -11 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x+3y &= 4 \\ y &= 1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x &= 1 \\ y &= 1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Le operazioni eseguite sulle equazioni del sistema sono

sommare alla seconda equazione la prima moltiplicata per -2;

dividere la seconda equazione per -11;

sommare alla prima equazione la seconda moltiplicata per -3.

Operazioni di questo tipo si dicono *operazioni elementari sulle equazioni di un sistema lineare*: esse hanno la proprieta' di lasciare invariato l'insieme delle soluzioni del sistema.

A queste operazioni corrispondono le operazioni, sulle righe della matrice completa,

sommare alla seconda riga la prima moltiplicata per -2;

dividere la seconda riga per -11;

sommare alla prima riga la seconda moltiplicata per -3.

Operazioni di questo tipo si dicono *operazioni elementari sulle righe di una matrice*. Qui, per "moltiplicare una riga per un numero" si intende "moltiplicare ogni elemento di quella riga per quel numero", e per "sommare ad una riga un'altra riga" si intende "sommare ad ogni elemento di quella riga il corrispondente elemento di quell'altra riga".

2. **Esercizio**. Risolvere il seguente sistema lineare

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ 2x+4y+4z & = & 3 \\ 5x+9y+8z & = & 5 \end{array} \right. .$$

Possiamo passare dal sistema lineare alla sua matrice completa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 9 & 8 & 5 \end{array} \right]$$

ed applicare direttamente su di essa le opportune operazioni elementari per righe

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right];$$

a questa matrice corrisponde il sistema lineare

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x+y+z & = & 1 \\ 2y+2z & = & 1 \\ -z & = & -2 \end{array} \right. .$$

che evidentemente e' determinato; per ottenere la sua unica soluzione possiamo continuare ad operare sulla matrice completa, ottenendo

$$\left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & -1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right];$$

a questa matrice corrisponde il sistema lineare

$$\begin{cases} x & = & 0.5 \\ \quad y & = & -1.5 \\ \quad\quad z & = & 2 \end{cases},$$

dunque l'unica soluzione del sistema e' la terna

$(0.5, -1.5, 2)$.

La matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

che abbiamo trovato al secondo passo del processo come matrice dei coefficienti si dice matrice *triangolare superiore non degenere:* triangolare superiore perche' tutti gli elementi al di sotto della diagonale discendente sono nulli, e non degenere perche' gli elementi $1, 2, -1$ sulla diagonale discendente sono tutti non nulli.

La matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

che abbiamo trovato all'ultimo passo del processo come matrice dei coefficienti si dice matrice *unita' del terzo ordine,* e si indica col simbolo I_3.

3. **Esercizio**. Risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y + 3z & = & 0 \\ 4x + 5y + 6z & = & 0 \end{cases}.$$

Osserviamo che la terna $(0, 0, 0)$ e' una soluzione del sistema; non e' detto pero' che sia l'unica soluzione.

Con una opportuna operazione elementare possiamo eliminare la variabile x dalla seconda equazione, ottenedo cosi' il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z & = & 0 \\ -3y - 6z & = & 0 \end{cases}.$$

Dalla seconda equazione possiamo ricavare la y in funzione della z :

$y = -2z;$

Poi possiamo sostituire questa espressione alla y nella prima equazione, ottenendo l'equazione

$x - 4z + 3z = 0, \qquad cioe' \; x - z = 0,$

dalla quale possiamo ricavare la x in funzione della z :

$x = z.$

Il sistema ha dunque infinite soluzioni, precisamente tutte le terne del tipo

$(z, -2z, z),$

ottenute al variare di z fra i numeri reali. Un sistema lineare che come questo ha infinite soluzioni si dice *indeterminato.*

Il sistema poteva anche essere risolto passando alla sua matrice completa ed operando su di essa con opportune operazioni elementari:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

A questa matrice corrisponde il sistema lineare

$$\left\{\begin{array}{cccc} x & & -z & = & 0 \\ & y & +2z & = & 0 \end{array}\right. ,$$

dal quale si possono ricavare la x e la y in funzione della z :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & & = & z \\ & y & = & -2z \end{array}\right. .$$

Arriviamo cosi' ancora alla stessa conclusione di sopra.

Possiamo interpretare geometricamente il risultato ottenuto dicendo che i piani corrispondenti alle equazioni $x + 2y + 3z = 0$ e $4x + 5y + 6z = 0$ si intersecano secondo una retta, i cui punti sono dati esplicitamente dall'espressione $(z, -2z, z)$, con $z \in R$.

4. **Esercizio**. Risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x+2y &= 1 \\ 3x+4y &= 0 \\ 5x+6y &= 0 \end{cases}.$$

Possiamo passare dal sistema lineare alla sua matrice completa ed applicare su di essa le opportune operazioni elementari per righe:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -5 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right];$$

a questa matrice corrisponde il sistema lineare

$$\begin{cases} x+2y &= 1 \\ -2y &= -3 \\ 0 &= 1 \end{cases}.$$

che evidentemente non ha soluzioni; un sistema lineare che come questo non ha soluzioni si dice *impossibile.*

5. Una *equazione lineare* nelle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, e' una equazione della forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ sono costanti reali; le costanti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono i coefficienti e b e' il termine noto dell'equazione. Una soluzione di questa equzione lineare e' una $n-$pla ordinata $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ di numeri reali che sostituiti ordinatamente alle variabili rende vera l'uguaglianza, cioe' tale che:

$a_1r_1 + a_2r_2 + \ldots + a_nr_n = b.$

Ogni sistema di m equazioni lineari in n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si puo' rappresentare nella forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \ldots+ & a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & \ldots+ & a_{2n}x_n = & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & a_{m2}x_2+ & \ldots+ & a_{mn}x_n = & b_m \end{cases},$$

dove $a_{11}, a_{12}, \ldots, \ldots, b_m$ sono costanti reali. Una soluzione di un tale sistema lineare e' una $n-$pla ordinata $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ di numeri reali che sia soluzione di tutte le equazioni del sistema. Risolvere un sistema significa determinare esplicitamente tutte le sue soluzioni. Un sistema lineare che non possiede soluzioni si dice *impossibile*, un sistema lineare che possiede una ed una sola soluzione si dice *determinato*, un sistema lineare che possiede piu' di una soluzione si dice *indeterminato.* Due sistemi lineari si dicono *equivalenti* quando hanno lo stesso insieme delle soluzioni.

Sulle equazioni di un sistema lineare possiamo effettuare le seguenti operazioni:

moltiplicare una equazione per un numero reale non nullo

sommare ad una equazione un'altra equazione moltiplicata per un numero reale

scambiare due equazioni,

dette *operazioni elementari sulle equazioni.* Queste operazioni trasformano un sistema lineare in un sistema lineare equivalente.

I coefficienti delle variabili possono essere rappresentati dalla matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ciascuna delle m righe di questa matrice da' i coefficienti delle n variabili in una stessa equazione, mentre ciascuna delle n colonne di questa matrice da' i coefficienti di una stessa variabile nelle m equazioni. I coefficienti e i termini noti del sistema possono essere rappresentati dalla matrice

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right],$$

ottenuta affiancando alla *matrice dei coefficienti del sistema* A la colonna

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

dei termini noti. Questa matrice $[A|b]$ viene detta *matrice completa del sistema.*

Riportando a sinistra la sequenza sistemi lineari prodotti del processo di eliminazione e riportando a destra di ogni sistema lineare la sua matrice completa, si vede che alle operazioni elementari eseguite sulle equazioni del sistema corrispondono le operazioni, sulle righe della matrice completa,

moltiplicare una riga per un numero reale non nullo

sommare ad una riga un'altra riga moltiplicata per un numero reale

scambiare due righe,

dette *operazioni elementari sulle righe.* Qui, per "moltiplicare una riga per un numero" si intende "moltiplicare ogni elemento di quella riga per quel numero", e per "sommare ad una riga un'altra riga" si intende "sommare ad ogni elemento di quella riga il corrispondente elemento di quell'altra riga".

Al processo di eliminazione sul sistema corrisponde il *processo di triangolarizzazione*, che opera sulla matrice completa del sistema in modo che la matrice dei coefficienti

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

sia trasformata in matrice triangolare superiore, cioe' una matrice del tipo

$$A' = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & \dots & \dots \\ 0 & c_{22} & c_{23} & c_{24} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{34} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$

cioe' tale che

$c_{ij} = 0 \qquad$ *per ogni* (i, j) *con* $i > j$.

La matrice triangolare superiore si dice *matrice triangolare superiore non degenere* se tutti gli elementi sulla diagonale discendente sono non nulli, in altri termini se

$c_{ii} \neq 0 \qquad$ *per ogni* $i = 1, 2, \dots, n$.

In generale, il processo di triangolarizzazione opera nel modo seguente:

(a) se $a_{11} \neq 0$, somma alla seconda riga la prima riga moltiplicata per $-a_{21}/a_{11}$, in modo da annullare a_{21}, poi somma alla terza riga la prima riga moltiplicata per $-a_{31}/a_{11}$, in modo da annullare a_{31}, ... e prosegui fino ad annullare tutti gli elementi $a_{21}, a_{31}, \dots, a_{m1}$ della prima colonna che stanno sotto a_{11}.

(b) se $a_{22} \neq 0$, somma alla terza riga la seconda riga moltiplicata per $-a_{32}/a_{22}$, in modo da annullare a_{32}, poi somma alla quarta riga la seconda riga moltiplicata per $-a_{42}/a_{22}$, in modo da annullare a_{42}, ... e prosegui fino ad annullare tutti gli elementi $a_{32}, a_{42}, \ldots, a_{m2}$ della seconda colonna che stanno sotto a_{22}.

(c) ...

Ua matrice triangolare superiore ha le seguenti forme

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \ldots & \ldots & \ldots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \ldots & \ldots & \ldots & c_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \ldots & \ldots & \ldots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & c_{mm} & \ldots & c_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \textit{per } m < n,$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \ldots & c_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \ldots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & & c_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \textit{per } m = n,$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \ldots & c_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \ldots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & & c_{nn} \\ 0 & 0 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & 0 \end{bmatrix}, \qquad \textit{per } m > n.$$

Nel caso $m = n$, se A' e' triangolare superiore non degenere, allora mediante ulteriori operazioni elementari sulle righe, si puo' ottenere la matrice I_n unita' di ordine n, cioe' la matrice quadata di tipo $n \times n$

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

In realta', il processo di triangolarizzazione si puo' dare direttamente sulle matrici, senza fare riferimento ai sistemi lineari. Lo esprimiamo in forma di teorema:

Teorema di triangolarizzazione *Ogni matrice A si puo' trasformare, mediante operazioni elementari sulle righe, in una matrice triangolare superiore A'. Nel caso di matrici quadrate, se A' e' triangolare non degenere, allora, mediante ulteriori operazioni elementari sulle righe, si puo' ottenere la matrice unita'.*

6. Abbiamo visto che a due equazioni lineari

   $a_1x + b_1y = c_1,$ *con a_1 e b_1 non entrambi nulli*

   $a_2x + b_2y = c_2$ *con a_2 e b_2 non entrambi nulli*

   corrisponde la stessa retta se e solo se la terna (a_1, b_1, c_1) dei parametri della prima equazione e' proporzionale alla terna (a_2, b_2, c_2) dei parametri della seconda.

   Ora, si ha che a queste due equazioni corrispondono rette aventi la stessa direzione se e solo se la coppia (a_1, b_1) dei coefficienti della prima equazione e' proporzionale alla coppia (a_2, b_2) dei coefficienti della seconda.

   Ad esempio, alle equazioni

   $x + 3y = 4$

   $2x - 5y = -3$

   corrispondono due rette aventi direzioni diverse; dunque il sistema lineare

   $$\begin{cases} x + 3y &= 4 \\ 2x - 5y &= -3 \end{cases}$$

   e' determinato.

   Ora, comunque siano dati i parametri p e q, si ha che alle due equazioni

   $x + 3y = p$

   $2x - 5y = q$

   corrispondono due rette aventi direzioni diverse; dunque ogni sistema lineare della forma

   $$\begin{cases} x + 3y &= p \\ 2x - 5y &= q \end{cases}$$

   e' determinato.

   Queste considerazioni portano alla seguente

   Definizione. *Una matrice A si dice matrice non singolare se e solo se ogni sistema lineare che ammette A come matrice dei coefficienti e' determinato.*

   Possiamo allora dire che la matrice

   $$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

e' non singolare, mentre la matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

e' singolare. Piu' in generale, possiamo dire che una matrice

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

quadrata di ordine 2 e' nonsingolare se e solo se la sue due righe (a_1, b_1) e (a_2, b_2) non sono proporzionali. Viene allora naturale chiedersi sotto quali condizioni una matrice quadrata di un ordine qualsiasi n sia non singolare.

7. **Esercizio**. La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 5 & 9 & 8 \end{bmatrix}$ e' non singolare?

Consideriamo il generico sistema lineare

$$\begin{cases} x + y + z & = & p \\ 2x + 4y + 4z & = & q \\ 5x + 9y + 8z & = & r \end{cases} .$$

che ammette A come matrice dei coefficienti, dove p, q, r sono parametri. Nell'esercizio al punto 2 abbiamo considerato il caso particolare in cui $p = 1,\ q = 3,\ r = 5$, ed abbiamo visto che il sistema era determinato. Ora dobbiamo chiederci se il sistema e' determinato *per ogni valore dei parametri* p, q, r.

Passiamo alla matrice completa del sistema ed applichiamo su di essa le opportune operazioni elementari per righe:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & p \\ 2 & 4 & 4 & q \\ 5 & 9 & 8 & r \end{array}\right]$$

ed applicare direttamente su di essa le opportune operazioni elementari per righe

$$\left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 1 & 1 & p \\ 0 & 2 & 2 & q - 2p \\ 0 & 4 & 3 & r - 5p \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccr|r} 1 & 1 & 1 & p \\ 0 & 2 & 2 & q - 2p \\ 0 & 0 & -1 & r - 2q - p \end{array}\right];$$

a questa matrice corrisponde il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y + z & = & p \\ 2y + 2z & = & q - 2p \\ -z & = & r - 2q - p \end{cases} .$$

che evidentemente e' determinato per ogni valore dei parametri p, q, r. Questo esercizio suggerisce il seguente risultato

Teorema *Ogni matrice quadrata A che si puo' trasformare, mediante operazioni elementari sulle righe, in una matrice triangolare superiore non degenere, e' non singolare.*

8. **Esercizio** La matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$
e' non singolare?

9. **Esercizio** La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ e' non singolare?

   Consideriamo il generico sistema lineare
$$\begin{cases} x + 2y + 3z & = & p \\ 4x + 5y + 6z & = & q \end{cases}$$
   che ammette A come matrice dei coefficienti, dove p, q sono parametri. Nell'esercizio al punto 3 abbiamo considerato il caso particolare in cui $p = 0,\ q = 0$, ed abbiamo visto che il sistema era indeterminato. Possiamo allora concludere che la matrice A e' singolare.

   Questo esercizio suggerisce il seguente

   Teorema *Ogni matrice A con meno righe che colonne, cioe' una matrice di tipo $m \times n$ con $m < n$, e' singolare.*

10. **Esercizio** La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ e' non singolare?

    Consideriamo il generico sistema lineare
$$\begin{cases} x + 2y & = & p \\ 3x + 4y & = & q \\ 5x + 6y & = & r \end{cases}$$
    che ammette A come matrice dei coefficienti, dove p, q, r sono parametri. Nell'esercizio al punto 3 abbiamo considerato il caso particolare in cui $p = 1,\ q = 0, r = 0$ ed abbiamo visto che il sistema era impossibile. Possiamo allora concludere che la matrice A e' singolare.

    Questo esercizio suggerisce il seguente

    Teorema *Ogni matrice A con piu' righe che colonne, cioe' ogni matrice di tipo $m \times n$ con $m > n$, e' singolare.*

11. Diamo una caratterizzazione delle matrici quadrate non singolari.

    Teorema *Una matrice quadrata A e' non singolare se e solo se e' soddisfatta una delle due condizioni equivalenti:*

    (a) A si puo' trasformare, mediante operazioni elementari sulle righe, in una matrice triangolare non degenere.

    (b) A si puo' trasformare, mediante operazioni elementari sulle righe, nella matrice unita'.