Matematica II 03.03.06

Descrizione del materiale *Nella lezione stati svolti solo alcuni degli argomenti riportati nella traccia, precisamente quelli riportati sotto le voci "Definizioni" e "Esempi, esperimenti, e problemi," cui sono stati aggiunti alcuni richiami sulle funzioni iniettive, suriettive, biiettive, e sulla funzione inversa. Per completezza, sono riportate di seguito sia la traccia, nella sua forma originale, che gli appunti della lezione.*

Matematica II 03.03.06 **- traccia**

Sunto. *Introdurremo le funzioni lineari* $R \to R$, *quelle* $R^2 \to R$, *quelle* $R \to R^2$, *e quelle, che ci interessano maggiormente,* $R^2 \to R^2$; *ne descriveremo l'interpretazione geometrica, e ne studieremo la composizione e l'invertibilita'. Poi vedremo come ciscuna di queste funzioni lineari puo' essere rappresentata da una matrice di tipo* 1×1 *(un numero reale), o* 1×2, *(una riga di due numeri reali), o* 2×1, *(una colonna di due numeri reali), o* 2×2, *(una matrice con due righe e due colonne), ed osserveremo che una funzione e' invertibile se e solo se la matrice che la rappresenta e' non singolare. Lo studio della relazione fra le matrici che rappresentano due funzioni e la matrice che rappresenta la funzione composta ci portera' ad introdurre l'operazione di prodotto di matrici.*

Di seguito sono riportate le principali definizioni, e gli esempi e gli esercizi dai quali prendera' spunto lo sviluppo della teoria.

Definizioni.

1. funzione lineare $R \to R$: una funzione del tipo

   $f(x) = ax, \qquad x \in R$

   dove a e' una costante reale;

2. funzione lineare $R^2 \to R$: una funzione del tipo

   $f(x, y) = ax + by, \qquad (x, y) \in R^2$

   dove a, b sono due costanti reali;

3. funzione lineare $R \to R^2$: una funzione del tipo

   $f(x) = (ax, bx) \qquad x \in R$

   dove a, b sono due costanti reali;

4. funzione lineare $R^2 \to R^2$: una funzione del tipo

   $f(x, y) = (ax + by, cx + dy) \qquad (x, y) \in R^2$

   dove a, b, c, d sono quattro costanti reali.

Esempi, esperimenti, e problemi.

1. E' data la funzione lineare $f: \ R^2 \to R^2$ definita da

   $f(x, y) = (x - y, x + y) \qquad (x, y) \in R^2.$

   In R^2, si rappresentino i punti $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$, e i punti loro immagini tramite la funzione f; che cosa viene da osservare?

2. Sono date le funzioni lineari $R^2 \to R^2$ definite da

   $f(x, y) = (x, -y) \qquad (x, y) \in R^2;$

   $g(x, y) = (y, x) \qquad (x, y) \in R^2.$

   Si interpreti geometricamente ciascuna delle due funzioni. Si calcolino le funzioni composte

   $g \circ f, \qquad f \circ g.$

   E' vero che $g \circ f = f \circ g$?

3. Per ciscuna delle seguenti funzioni lineari $R^2 \to R^2$, definite da

   $f(x, y) = (x + 2y, 3x + 4y) \qquad (x, y) \in R^2,$

   $g(x, y) = (6x - 4y, -9x + 6y) \qquad (x, y) \in R^2,$

   si dica se e' invertibile o meno e, in caso affermativo se ne calcoli la funzione inversa.

Rappresentazione matriciale di funzioni lineari.

$$f(x) = ax \qquad \begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$$

$$f(x, y) = bx + cy \qquad \begin{bmatrix} b & c \end{bmatrix}$$

$$f(x) = (dx, ex) \qquad \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}$$

$$f(x, y) = (px + qy, rx + sy) \qquad \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

Conti e problemi.

1. Sono date le generiche funzioni lineari

   $f: \ R \to R^2, \qquad f(x,y) = (cx, dx) \qquad x \in R.$

   $g: \ R^2 \to R, \qquad g(x,y) = ax + by \qquad (x,y) \in R^2;$

   Si determini la matrice che rappresenta la funzione composta $g \circ f$ e la si confronti con le matrici che rappresentano le funzioni g e f; che relazione sussiste fra queste matrici?

2. Con riferimento al punto precedente, si determini la matrice che rappresenta la funzione composta $f \circ g$ e la si confronti con le matrici che rappresentano le funzioni f e g; che relazione sussiste fra queste matrici?

3. Sono date le generiche funzioni lineari

   $f: \ R^2 \to R^2, \qquad f(x,y) = (ax + by, cx + dy) \qquad (x,y) \in R^2;$

   $g: \ R^2 \to R^2, \qquad g(x,y) = (px + qy, rx + sy) \qquad (x,y) \in R^2.$

   Si determini la matrice che rappresenta la funzione composta $g \circ f$ e la si confronti con le matrici che rappresentano le funzioni g e f; che relazione sussiste fra queste matrici?

Matematica II 03.03.06 - appunti

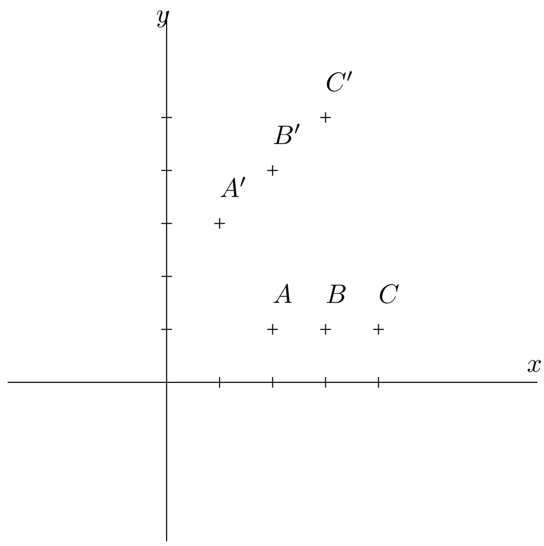
Esempi, esperimenti, e problemi.

- E' data la funzione lineare $f: \ R^2 \to R^2$ definita da

  $f(x,y) = (x - y, x + y) \qquad (x,y) \in R^2.$

  In R^2, si rappresentino i punti $(2,1)$, $(3,1)$, $(4,1)$, e i punti loro immagini tramite la funzione f; che cosa viene da osservare?

punto	*immagine*
$P = (x,y)$	$P' = f(x,y)$
$A = (2,1)$	$A' = (1,3)$
$B = (3,1)$	$B' = (2,4)$
$C = (4,1)$	$C' = (3,5)$



Viene da osservare che, cosi' come i punti A, B, C sono allineati, anche le loro immagini A', B', C' sono punti allineati. Si puo' provare che in realta' ogni funzione lineare $R^2 \to R^2$ trasforma rette in rette.

- Sono date le funzioni lineari $R^2 \to R^2$ definite da

  $f(x, y) = (x, -y) \qquad (x, y) \in R^2;$

  $g(x, y) = (y, x) \qquad (x, y) \in R^2.$

  Si interpreti geometricamente ciascuna delle due funzioni. Si calcolino le funzioni composte

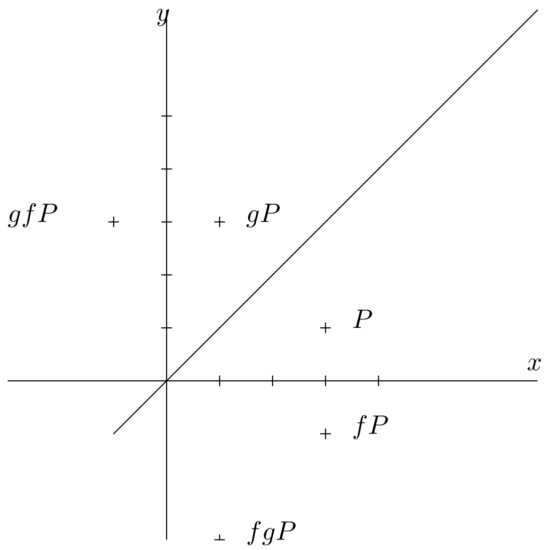
  $g \circ f, \qquad f \circ g.$

  E' vero che $g \circ f = f \circ g$?

La funzione f e' la simmetria rispetto all'asse x, mentre la funzione g e' la simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante. Nella figura qui sotto si e' preso un punto P del piano e se ne sono costruite geometricamente le immagini

$(g \circ f)(P) = g(f(P)), \qquad (f \circ g)(P) = f(g(P)),$

che risultano diverse; dunque possiamo affermare che $g \circ f \neq f \circ g$.



Dal punto di vista algebrico, possiamo osservare che: la funzione f opera su una coppia cambiando di segno alla seconda componente, e la funzione g opera su una coppia scambiando le componenti. Da una parte si ha
$(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y)) = g(x, -y) = (-y, x)$,
dall'altra si ha
$(f \circ g)(x, y) = f(g(x, y)) = f(y, x) = (y, -x)$.
Dunque si conclude ancora che $g \circ f \neq f \circ g$.

Definizioni

Sia data una funzione $f : A \to B$ una funzione da un insieme A verso un insieme B; A si dice dominio, e B si dice codominio. Per ogni elemento a da A, l'elemento $f(a)$ si dice immagine di a.

1. se ciascun elemento b del codominio B e' immagine di *al piu'* un elemento del dominio A, cioe' se per ciascun elemento b del codominio B l'equazione

   $f(x) = b$

   o ha esattamente una soluzione o non ha soluzioni in A, allora la funzione f si dice *iniettiva;*

2. se ciascun elemento b del codominio B e' immagine di *almeno* un elemento del dominio A, cioe' se per ciascun elemento b del codominio B l'equazione

   $f(x) = b$

   o ha esattamente una soluzione o ha piu' di una soluzione in A, allora la funzione f si dice *suriettiva;*

3. se ciascun elemento b del codominio B e' immagine di *esattamente* un elemento del dominio A, cioe' se per ciascun elemento b del codominio B l'equazione

   $f(x) = b$

   ha esattamente una soluzione in A, allora la funzione f si dice *biiettiva;*

   La funzione $f^{-1}:\ B \to A$ definita da

   $f^{-1}(b) =$ [*l'unica soluzione di* $f(x) = b$],

   viene detta *funzione inversa* di f.

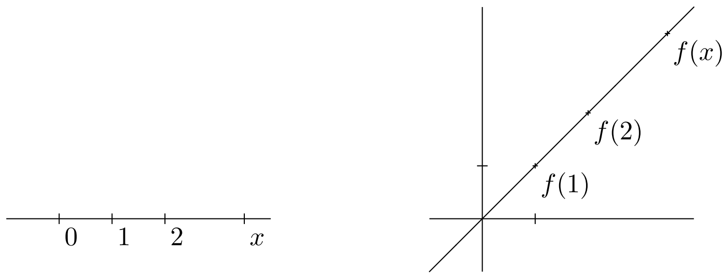
Esempi, esperimenti, e problemi - continuazione.

- Consideriamo la funzione $f : R \to R^2$ definita da

  $f(x) = (x, x), \qquad x \in R$

  e chiediamoci se e' iniettiva, suriettiva o biiettiva.

Possiamo rappresentare f nel modo seguente:



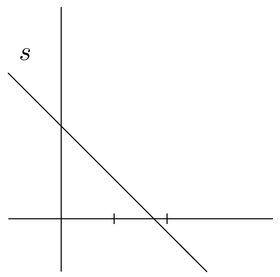
Osserviamo che l'immagine $(x, x) = f(x)$ del punto x della retta reale descrive, al variare di x, la retta r bisettrice del I e III quadrante. Ogni punto di R^2 che sta su r e' l'immagine di esattamente un punto di R, mentre ogni punto di R^2 che sta fuori da r non e' immagine di nessun punto di R. Dunque questa funzione f e' iniettiva, non e' suriettiva, e non e' biiettiva.

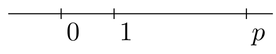
- Consideriamo la funzione $f : R^2 \to R$ definita da

  $f(x, y) = \frac{1}{2}(x + y). \qquad (x, y) \in R^2$

  e chiediamoci se e' iniettiva, suriettiva o biiettiva.

Possiamo rappresentare f nel modo seguente:





Osserviamo che ogni punto p della retta reale e' immagine di almeno un punto del piano reale, ad esempio del punto (p,p); dunque questa funzione e' suriettiva. In realta' i punti del piano la cui immagine e' il punto p costituiscono una retta, dunque questa funzione non e' iniettiva. La funzione non e' biiettiva.

- E' data la funzione $f : R^2 \to R^2$ definita da

  $f(x,y) = (x+2y, 3x+4y) \qquad (x,y) \in R^2;$

  si dica se e' biiettiva o meno e, in caso affermativo, se ne calcoli la funzione inversa.

Dobbiamo chiederci se ciascun punto (p,q) di R^2 e' immagine di esattamente un punto di R^2, cioe' se per ciascun elemento (p,q) di R^2 l'equazione

$f(x,y) = (p,q), \quad cioe' \quad (x+2y, 3x+4y) = (p,q)$

ha esattamente una soluzione in R^2. Ora, questa equazione fra coppie di numeri reali equivale al sistema lineare

$$\begin{cases} x+2y &= p \\ 3x+4y &= q \end{cases}.$$

Dunque dobbiamo chiederci se questo sistema lineare e' determinato per ciascuna coppia (p,q) di termini noti. Eliminando la variabile x dalla seconda equazione si ottiene

$$\begin{cases} x+2y &= p \\ -2y &= -3p+q \end{cases}.$$

Per ciascuna coppia (p,q) di termini noti questo sistema e' determinato, e la sua unica soluzione e' data, in funzione di (p,q), dalla coppia

$(-2p+q, 1.5p-0.5q).$

Dunque la funzione f e' biiettiva, e la sua funzione inversa $f^{-1} : R^2 \to R^2$ e' data da

$f^{-1}(x,y) = (-2x+y, 1.5x-0.5y), \qquad (x,y) \in R^2.$

- E' data la funzione $g : R^2 \to R^2$ definita da

  $g(x,y) = (6x-4y, -9x+6y) \qquad (x,y) \in R^2;$

  si dica se e' biiettiva o meno e, in caso affermativo, se ne calcoli la funzione inversa.

Dobbiamo chiederci se ciascun punto (p, q) di R^2 e' immagine di esattamente un punto di R^2, cioe' se per ciascun elemento (p, q) di R^2 l'equazione

$$g(x, y) = (p, q), \quad cioe' \quad (6x - 4y, -9x + 6y) = (p, q)$$

ha esattamente una soluzione in R^2. Ora, questa equazione fra coppie di numeri reali equivale al sistema lineare

$$\begin{cases} 6x - 4y &= p \\ -9x + 6y &= q \end{cases}.$$

Dunque dobbiamo chiederci se questo sistema lineare e' determinato per ciascuna coppia (p, q) di termini noti. Eliminando la variabile x dalla seconda equazione si ottiene

$$\begin{cases} 6x - 4y &= p \\ 0 &= 1.5p + q \end{cases}.$$

Ora:

- per ciascuna coppia (p, q) di termini noti tali che $1.5p + q \neq 0$, il sistema e' impossibile;
- per ciascuna coppia (p, q) di termini noti tali che $1.5p + q = 0$, il sistema e' indeterminato.

Cio' significa:

- ciascun punto (p, q) fuori dalla retta $y = -1.5x$ non e' immagine di alcun punto del piano;
- ciascun punto (p, q) sulla retta $y = -1.5x$ e' immagine di infiniti punti del piano.

Dunque, la funzione g non e' suriettiva, non e' iniettiva, non e' biiettiva, e non possiede funzione inversa.