Matematica II 06.03.06

Descrizione del materiale *Nella lezione sono stati svolti gli esercizi della sezione "Conti e problemi" della traccia della precedente lezione, e gli argomenti "Definizione di prodotto di matrici," "Rappresentazione matriciale di un sistema lineare" della traccia della presente lezione, cui sono stati aggiunti alcuni richiami sulle funzioni composte. Per completezza, sono riportate di seguito sia la traccia, nella sua forma originale, che gli appunti della lezione.*

Matematica II 06.03.06 **traccia**

Sunto *Definiremo il prodotto per due matrici di tipo arbitrario, e vedremo come questa operazione permetta di rappresentare il generico sistema lineae nella forma*

$$A[x] = [b].$$

Studieremo le proprieta' del prodotto di matrici. Definiremo la nozione di matrice inversa A^{-1} di una matrice A, proveremo che la matrice A possiede inversa se e solo se A e' non singolare, e vedremo come in questo caso l'unica soluzione del generico sistema lineare avente A come matrice dei coefficienti si possa scrivere nella forma

$$[x] = A^{-1}[b].$$

Infine, daremo un algoritmo per il calcolo della matrice inversa.

1. **Definizione di prodotto di matrici** L'ingrediente fondamentale e' la definizione di prodotto di una riga per una colonna aventi lo stesso numero di elementi. Il prodotto AB una matrice A di tipo $m \times n$ per una matrice B di tipo $n \times p$ e' una matrice di tipo $m \times p$: la tabella dei prodotti delle m righe di A per le n colonne di B. Il prodotto di una matrice A di tipo $m \times n$ per una matrice B di tipo $p \times q$, con $n \neq p$ non viene definito.

2. **Rappresentazione matriciale di un sistema lineare** Il generico sistema lineare di m equazioni in n incognite si puo' rappresentare nella forma

$$A[x] = [b],$$

dove: A e' la matrice, di tipo $m \times n$, dei coefficienti del sistema, $[x]$ e' la colonna delle n incognite, e $[b]$ e' la colonna degli m termini noti.

3. **Proprieta' del prodotto di matrici** Per ogni tre matrici A, B, C tali che siano definiti i prodotti AB e BC, i due modi di eseguire il prodotto delle tre matrici danno lo stesso risultato:

   $(AB)C = A(BC)$;

   cio' si esprime dicendo che la moltiplicazione di matrici e' un'operazione associativa. In generale, si ha

   $AB \neq BA$,

   cioe' la moltiplicazione di matrici non e' un'operazione commutativa. Per ogni matrice A di tipo $m \times n$ si ha

   $I_m A = A = A I_n$,

   dove I_m ed I_n sono le matrici unita' di ordine m, n, rispettivamente.

4. **Matrici inverse** Sia A una matrice di tipo $m \times n$, e sia B una matrice di tipo $n \times m$.

   - si dice che B e' *un'inversa sinistra* di A se
     $BA = I_n$;
   - si dice che B e' *un'inversa destra* di A se
     $AB = I_m$;
   - si dice che B e' *un'inversa* di A se
     $BA = I_n \qquad e \qquad AB = I_m$.

   Si prova che, se la matrice A ha sia un'inversa destra che un'inversa sinistra, allora queste coincidono; in particolare, se la matrice A possiede un'inversa, essa e' unica; l'inversa di A viene indicata con

   $$A^{-1}.$$

5. **Proposizione** Sia A una matrice di tipo $m \times n$, e si consideri il generico sistema lineare

   $$A[x] = [b],$$

   avente la matrice A come matrice dei coefficienti. Allora:

   - tutti questi sistemi lineari hanno al piu' una soluzione se e solo se la matrice A possiede un'inversa sinistra;
   - tutti questi sistemi lineari hanno almeno una soluzione se e solo se la matrice A possiede un'inversa destra;
   - tutti questi sistemi lineari hanno esattamente una soluzione se e solo se la matrice A possiede un'inversa; in altri termini, la matrice A e' non singolare se e solo se e' invertibile; in questo caso, la soluzione e' data da

     $$[x] = A^{-1}[b]$$

6. **Algoritmo di Gauss-Jordan per il calcolo della matrice inversa** Dal punto precedente possiamo ricavare che una matrice A e' invertibile se e solo se e' quadrata di un certo ordine n e si puo' trasformare, mediante operazioni elementari sulle righe, nella matrice unita' I_n. In questo caso, la matrice
$$[A|I_n]$$
si puo' trasformare, mediante operazioni elementari sulle righe, in una matrice del tipo
$$[I_n|B]$$
e si ha $B = A^{-1}$.

Matematica II 06.03.06 **appunti**

Rappresentazione matriciale di funzioni lineari.

$$f(x) = ax \qquad \begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$$

$$f(x,y) = bx + cy \qquad \begin{bmatrix} b & c \end{bmatrix}$$

$$f(x) = (dx, ex) \qquad \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}$$

$$f(x,y) = (px + qy, rx + sy) \qquad \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

Intermezzo sulla composizione di funzioni.

1. Consideriamo due funzioni $f : A \to B$, $g : C \to D$, e chiediamoci sotto quali condizioni e' definita la funzione composta $g \circ f : A \to D$. Per definizione si ha che
$$(g \circ f)(a) = g(f(a)), \qquad a \in A;$$
nel caso in cui la valutazione $f(a)$ della funzione f sul generico elemento a di A sia sempre un elemento di C, si ha che ha senso considerare la valutazione $g(f(a))$ della funzione g sull'elemento elemento $f(a)$; invece, nel caso in cui la valutazione $f(a*)$ della funzione f su qualche elemento $a*$ di A non sia un elemento di C, si ha che non ha senso considerare la valutazione $g(f(a*))$ della funzione g sull'elemento elemento $f(a*)$. Si e' cosi' portati a chiedere che il codominio B della prima funzione f coincida

con il dominio C della seconda funzione g. [1] Il complesso costituito dalle due funzioni e dala loro funzione composta puo' essere rappresentato come segue:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

2. Per ogni tre funzioni $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$, i due modi di eseguire la composizione delle tre funzioni danno lo stesso risultato:

   $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$;

   cio' si esprime dicendo che la composizione di funzioni e' un'operazione associativa. In generale, si ha

   $g \circ f \neq f \circ g$,

   cioe' la composizione di funzioni non e' un'operazione commutativa.

3. Per ciascun insieme A, la funzione $A \to A$ che manda ogni elemento di A se' stesso viene detta funzione identica su A, e viene indicata con id_A. Per ogni funzione $f : A \to B$ si ha

   $id_B \circ f = f = f \circ id_A$.

Conti e problemi.

1. Sono date le generiche funzioni lineari

   $f : \ R \to R^2, \qquad f(x) = (cx, dx) \qquad x \in R.$

   $g : \ R^2 \to R, \qquad g(x, y) = ax + by \qquad (x, y) \in R^2;$

   Si determini la matrice che rappresenta la funzione composta $g \circ f$ e la si confronti con le matrici che rappresentano le funzioni g e f; che relazione sussiste fra queste matrici?

   Svolgimento Innanzitutto, la situazione che stiamo considerando si puo' rappresentare col diagramma

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & R^2 \arrow[r, "g"] & R \end{tikzcd}$$

[1] Questa e' la condizione solitamente posta in Algebra, anche se basterebbero condizioni piu' deboli

Dunque le matrici che rappresentano, nell'ordine, g, f e $g \circ f$ sono:

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ? \end{bmatrix},$$

dove ? e' un'espressione che dipende da a, b, c, d. Ora calcoliamo:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(cx, dx) \\ &= acx + bdx \\ &= (ac + bd)x. \end{aligned}$$

Qui sotto riportiamo, nell'ordine, le matrici che rappresentano g, f e $g \circ f$:

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ac + bd \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che l'unico elemento della matrice di $g \circ f$ si ottiene sommando il prodotto dei primi elementi delle matrici di g ed f con il prodotto dei secondi elementi delle matrici di g ed f.

2. Con riferimento al punto precedente, si determini la matrice che rappresenta la funzione composta $f \circ g$ e la si confronti con le matrici che rappresentano le funzioni f e g; che relazione sussiste fra queste matrici?

   Svolgimento Innanzitutto, la situazione che stiamo considerando si puo' rappresentare col diagramma

$$\begin{tikzcd} R^2 \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & R \arrow[r, "f"] & R^2 \end{tikzcd}$$

   Dunque le matrici che rappresentano, nell'ordine, f, g e $f \circ g$ sono:

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix},$$

   dove ? sono espressioni che dipendono da a, b, c, d. Ora calcoliamo:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x, y) &= f(g(x, y)) \\ &= f(ax + by) \\ &= (c(ax + by), d(ax + by)) \\ &= (cax + cby, dax + dby). \end{aligned}$$

Qui sotto riportiamo, nell'ordine, le matrici che rappresentano f, g e $f \circ g$:

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ca & cb \\ da & db \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che la matrice di $f \circ g$ e' la "tabella pitagorica" dei prodotti dei numeri c, d per i numeri a, b.

3. Sono date le generiche funzioni lineari

$f: \ R^2 \to R^2, \qquad f(x,y) = (ax + by, cx + dy) \qquad (x,y) \in R^2;$

$g: \ R^2 \to R^2, \qquad g(x,y) = (px + qy, rx + sy) \qquad (x,y) \in R^2.$

Si determini la matrice che rappresenta la funzione composta $g \circ f$ e la si confronti con le matrici che rappresentano le funzioni g e f; che relazione sussiste fra queste matrici?

Svolgimento Innanzitutto, la situazione che stiamo considerando si puo' rappresentare col diagramma

$$\begin{tikzcd} R^2 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & R^2 \arrow[r, "g"] & R^2 \end{tikzcd}$$

Dunque le matrici che rappresentano, nell'ordine, g, f e $g \circ f$ sono:

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix},$$

dove ? sono espressioni che dipendono da p, q, r, s, a, b, c, d. Ora calcoliamo:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x,y) &= g(f(x,y)) \\ &= g(ax + by, cx + dy) \\ &= (p(ax + by) + q(cx + dy), r(ax + by) + s(cx + dy)) \\ &= ((pa + qc)x + (pb + qd)y, (ra + sc)x + (rb + sd)y). \end{aligned}$$

Qui sotto riportiamo, nell'ordine, le matrici che rappresentano f, g e $g \circ f$:

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} pa + qc & pb + qd \\ ra + sc & rb + sd \end{bmatrix},$$

Osserviamo che la matrice di $g \circ f$ e' la "tabella pitagorica" dei prodotti delle righe della matrice di g per le colonne della matrice di f.

Commento. Siamo cosi' portati a definire il prodotto di una matrice A per una matrice B come la tabella dei prodotti delle righe di A per le colonne di B, sotto la condizione che il numero di elementi in ciascuna riga di A sia uguale al numero di elementi in ciascuna colonna di B. Ad esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5 & 1\cdot 2+2\cdot 4+3\cdot 6 \\ 4\cdot 1+5\cdot 3+6\cdot 5 & 4\cdot 2+5\cdot 4+6\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{bmatrix}$$

Sistemi lineari. Possiamo usare il prodotto di matrici per rappresentare sinteticamente il generico sistema lineare di 2 equazioni in 2 incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \end{cases} .$$

Precisamente, le due uguaglianze che costituiscono il sistema si possono rappresentare come una sola uguaglianza fra due colonne:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

questa uguaglianza puo' essere riscritta nella forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Ponendo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [x], \qquad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = [b],$$

questa uguaglianza puo' essere infine sintetizzata nella forma

$$A[x] = [b].$$

Possiamo dunque pensare il generico sistema lineare di 2 equazioni in 2 incognite come una singola equazione lineare, che ha per incognita una colonna, per termine noto una colonna, e per coefficiente una matrice.

Intermezzo sulle notazioni matriciali. Introduciamo ora una notazione adeguata per descrivere le matrici e le operazioni su di esse, si tratta della notazione usata nell'applicazione "Octave" che verra' usata nella parte del corso per gli studenti di Statistica e Informatica per l'Azienda. Consideriamo una matrice di tipo 2×3 cui abbiamo assegnato un nome, ad esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Allora

1. indichiamo con

   $A(i,j), \qquad i = 1,2, \; j = 1,2,3$

   l'elemento della matrice A che sta nella riga $i-$ma e nella colonna $j-$ma, ad esempio:

   $A(1,2) = 2, \qquad A(2,3) = 6.$

2. indichiamo con

   $A(i,:), \qquad i = 1,2,$

   la riga $i-$ma della matrice $A:$

   $A(1,:) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad A(2,:) = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

3. indichiamo con

   $A(:,j), \qquad j = 1,2,3$

   la colonna $j-$ma della matrice $A:$

   $A(:,1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad A(:,2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad A(:,3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$

Osserviamo che la matrice A puo' essere riguardata sia come la colonna delle sue 2 righe, sia come la riga delle sue 3 colonne:

$$A = \begin{bmatrix} A(1,:) \\ A(2,:) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(:,1) & A(:,2) & A(:,3) \end{bmatrix}.$$

Definizione di prodotto di due matrici arbitrarie L'ingrediente fondamentale e' la definizione di prodotto di una riga per una colonna aventi lo stesso numero di elementi. Il prodotto AB una matrice A di tipo $m \times n$

$$A: \; A(i,j), \qquad i = 1,2,\ldots,m, \quad j = 1,2,\ldots,n$$

per una matrice B di tipo $n \times p:$

$$B: \; B(h,k), \qquad h = 1,2,\ldots,n, \quad k = 1,2,\ldots,p$$

e' una matrice di tipo $m \times p:$

$$AB: \; AB(i,k), \qquad i = 1,2,\ldots,m, \quad k = 1,2,\ldots,p$$

la tabella dei prodotti delle m righe di A per le n colonne di $B:$

$$\begin{aligned} AB(i,k) &= A(i,:)B(:,k) \\ &= A(i,1)B(1,k) + A(i,2)B(2,k) + \cdots + A(i,n)B(n,k). \end{aligned}$$

Il prodotto di una matrice A di tipo $m \times n$ per una matrice B di tipo $q \times p$, con $n \neq q$ non viene definito.

Sistemi lineari. Possiamo usare il prodotto di matrici per rappresentare sinteticamente il generico sistema lineare di m equazioni in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \ldots + & a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \ldots + & a_{2n}x_n = & b_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \ldots + & a_{mn}x_n = & b_m \end{cases}$$

nella forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Ponendo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = A, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x], \qquad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = [b],$$

questa uguaglianza puo' essere infine sintetizzata nella forma

$$A[x] = [b].$$

Possiamo dunque pensare il generico sistema lineare di m equazioni in n incognite come una singola equazione lineare, che ha per incognita una colonna di n elementi, per termine noto una colonna di m elementi, e per coefficiente una matrice di tipo $m \times n$.