Matematica II 10.03.06

Nota *Per ragioni di tempo, non viene riportata la descrizione dettagliata del materiale. Si avverte soltanto che la traccia e' stata svolta solo in parte, in particolare non si sono discusse le inverse sinistre e destre, e l'algoritmo di Gauss-Jordan e' stato solo enunciato. La dimostrazione della proposizione al punto 11 e' da considerarsi facoltativa.*

Matematica II 10.03.06 **traccia**

1. **Proprieta' del prodotto di matrici** Per ogni tre matrici A, B, C tali che siano definiti i prodotti AB e BC, i due modi di eseguire il prodotto delle tre matrici danno lo stesso risultato:

   $(AB)C = A(BC)$;

   cio' si esprime dicendo che la moltiplicazione di matrici e' un'operazione associativa. In generale, si ha

   $AB \neq BA$,

   cioe' la moltiplicazione di matrici non e' un'operazione commutativa. Per ogni matrice A di tipo $m \times n$ si ha

   $I_m A = A = A I_n$,

   dove I_m ed I_n sono le matrici unita' di ordine m, n, rispettivamente.

2. **Matrici inverse** Sia A una matrice di tipo $m \times n$, e sia B una matrice di tipo $n \times m$.

   - si dice che B e' *un'inversa sinistra* di A se
     $BA = I_n$;
   - si dice che B e' *un'inversa destra* di A se
     $AB = I_m$;
   - si dice che B e' *un'inversa* di A se
     $BA = I_n \qquad e \qquad AB = I_m.$

   Si prova che, se la matrice A ha sia un'inversa destra che un'inversa sinistra, allora queste coincidono; in particolare, se la matrice A possiede un'inversa, essa e' unica; l'inversa di A viene indicata con

   $$A^{-1}.$$

3. **Proposizione** Sia A una matrice di tipo $m \times n$, e si consideri il generico sistema lineare
$$A[x] = [b],$$
avente la matrice A come matrice dei coefficienti. Allora:

   - tutti questi sistemi lineari hanno al piu' una soluzione se e solo se la matrice A possiede un'inversa sinistra;
   - tutti questi sistemi lineari hanno almeno una soluzione se e solo se la matrice A possiede un'inversa destra;
   - tutti questi sistemi lineari hanno esattamente una soluzione se e solo se la matrice A possiede un'inversa; in altri termini, la matrice A e' non singolare se e solo se e' invertibile; in questo caso, la soluzione e' data da
$$[x] = A^{-1}[b]$$

4. **Algoritmo di Gauss-Jordan per il calcolo della matrice inversa** Dal punto precedente possiamo ricavare che una matrice A e' invertibile se e solo se e' quadrata di un certo ordine n e si puo' trasformare, mediante operazioni elementari sulle righe, nella matrice unita' I_n. In questo caso, la matrice
$$[A|I_n]$$
si puo' trasformare, mediante operazioni elementari sulle righe, in una matrice del tipo
$$[I_n|B]$$
e si ha $B = A^{-1}$.

Matematica II 10.03.06 **appunti**

1. Siano m, n interi positivi. Per rappresentare la generica matrice con m righe ed n colonne, cioe' la generica matrice di tipo $m \times n$, spesso scriveremo un simbolo come $A, B, \ldots$ e sotto di esso il tipo:
$$\underset{m\ n}{A}.$$
Indicheremo poi l'insieme delle matrici di tipo $m \times n$ con il simbolo
$$R^{m \times n}.$$
Osserviamo che: l'insieme $R^{m \times 1}$ delle matrici colonna con m elementi si puo' identificare con l'insieme R^m delle $m-$ple ordinate di numeri reali,

cosi' come l'insieme $R^{1\times n}$ delle matrici riga con n elementi si puo' identificare con l'insieme R^n delle $n-$ple ordinate di numeri reali, e che l'insieme $R^{1\times 1}$ coincide con l'insieme R dei numeri reali.

Per ogni due matrici

$A:\ A(i,j), \qquad i=1,\dots m, \quad j=1,\dots n,$

di tipo $m\times n$ e

$B:\ B(j,k), \qquad j=1,\dots n, \quad h=1,\dots p,$

di tipo $n\times p$, abbiamo definito la matrice AB prodotto di A per B come la matrice

$AB:\ (AB)(i,k), \qquad i=1,\dots m, \quad h=1,\dots p,$

di tipo $m\times p$ data dalla tabella dei prodotti delle righe di A per le p colonne di B :

$$(AB)(i,k)=A(i,:)B(:,k)=\sum_{j=1}^{n}A(i,j)B(j,k).$$

Possiamo rappresentare la relazione fra i tipi delle matrici fattori ed il tipo della matrice prodotto con lo schema

$$(\underset{mn}{A},\underset{np}{B})\mapsto \underset{mp}{AB}.$$

Osserviamo che il prodotto di matrici 1×1 coincide con l'usuale prodotto di numeri reali.

2. **Proprieta' associativa** Per ogni tre matrici

   $A:\ A(i,j), \qquad i=1,\dots m, \quad j=1,\dots n,$

   $B:\ B(j,h), \qquad j=1,\dots n, \quad h=1,\dots p,$

   $C:\ C(h,k), \qquad h=1,\dots p, \quad k=1,\dots q,$

   possiamo svolgere i prodotti in due modi diversi, tenendo fisso l'ordine delle tre matrici, ma il risultato finale e' lo stesso:

   $$(AB)C=A(BC).$$

   Per questo fatto, nel seguito potremo omettere le parentesi in un prodotto di matrici.

   Esempio Date le tre matrici

   $$A=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad C=\begin{bmatrix} y_1\\ y_2 \end{bmatrix},$$

si ha

$$
\begin{aligned}
(AB)C &= \left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{21} & x_1 a_{12} + x_2 a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\
&= x_1 a_{11} y_1 + x_2 a_{21} y_1 + x_1 a_{12} y_2 + x_2 a_{22} y_2
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
A(BC) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 \end{bmatrix} \\
&= x_1 a_{11} y_1 + x_1 a_{12} y_2 + x_2 a_{21} y_1 + x_2 a_{22} y_2.
\end{aligned}
$$

Dimostrazione

$$
\begin{aligned}
((AB)C)(i,k) &= \sum_h (AB)(i,h) C(h,k) \\
&= \sum_h \left[\left[\sum_j A(i,j) B(j,h) \right] C(h,k) \right] \\
&= \sum_{h,j} A(i,j) B(j,h) C(h,k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(A(BC))(i,k) &= \sum_j A(i,j)(BC)(j,k) \\
&= \sum_j \left[A(i,j) \left[\sum_h B(j,h) C(h,k) \right] \right] \\
&= \sum_{h,j} A(i,j) B(j,h) C(h,k).
\end{aligned}
$$

3. **Non-Proprieta' Commutativa** Consideriamo una matrice A di tipo $m \times n$ e una matrice B di tipo $p \times q$. Osserviamo che possiamo eseguire il prodotto AB solo se $n = p$, e possiamo eseguire il prodotto BA solo se $q = m$, dunque possiamo eseguire entrambi i prodotti solo se: A e' di tipo $m \times n$ e B e' di tipo $n \times m$. Poi, AB ha tipo $m \times m$ e BA ha tipo $n \times n$;

cosi', puo' essere $AB = BA$ solo se $m = n$, cioe' se entrambe le matrici sono quadrate dello stesso ordine. Infine, ecco un esempio che mostra la non commutativita' del prodotto: per le due matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}$$

da un lato si ha

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 2q \\ 3p & 4q \end{bmatrix}$$

e dall'altro si ha

$$BA = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 2p \\ 3q & 4q \end{bmatrix}$$

Dunque $AB \neq BA$, a meno che $p = q$. Osserviamo che B agisce sulla destra di A moltiplicando le colonne di A per p e q, mentre B agisce sulla sinistra di A moltiplicando le righe di A per p e q.

4. **Matrici unita'** Sappiamo che il numero reale 1 e' caratterizzato dalla seguente proprieta': $1a = a = a1$, per qualsiasi numero reale a. Nelle matrici, il ruolo del numero 1 e' svolto dalla successione delle matrici unita'

$$I_1 = [1], \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \ldots$$

nel senso che

$$\underset{m\,n}{A}\ I_n = \underset{m\,n}{A}, \qquad I_n\ \underset{n\,p}{B} = \underset{n\,p}{B}.$$

Si verifica che ciascuna matrice I_n e' univocamente determinata da queste proprieta'.

Verifichiamo la prima di queste proprieta' per la matrice unita' del secondo ordine:

$$\begin{bmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\,1 + a'\,0 & a\,0 + a'\,1 \\ b\,1 + b'\,0 & b\,0 + b'\,1 \\ c\,1 + c'\,0 & c\,0 + c'\,1 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

5. **Intermezzo.** Consideriamo la generica equazione lineare in una incognita

$$ax = b,$$

dove a, b sono costanti reali. Sappiamo che, sotto la condizione $a \neq 0$, questa equazione ha esattamente una soluzione, data da

$$x = a^{-1}b,$$

dove a^{-1} e' l'inverso di a, cioe' quel numero reale caratterizzato dalle proprieta' $aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$. Vedremo ora come questo argomento si estende al caso delle matrici.

6. **Definizione di matrice inversa.** Sia A una matrice di tipo $m \times n$, e sia B una matrice di tipo $n \times m$; si dice che B e' *un'inversa* di A se
$$AB = I_m \qquad e \qquad BA = I_n.$$
Se B soddisfa la prima condizione, si dice che B e' un'inversa destra di A; se B soddisfa la seconda condizione, si dice che B e' un'inversa sinistra di A. Consideriamo alcune matrici e chiediamoci se possiedono una matrice inversa.

   (a) Sia
   $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$
   Le possibili matrici inverse di A sono le matrici
   $B = \begin{bmatrix} p & q \end{bmatrix}$
   tali che
   $AB = I_2 \qquad e \qquad BA = I_1.$
   Esplicitamente, la prima condizione e'
   $AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ p & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2,$
   che non e' mai soddisfatta. Possiamo allora dire che A non possiede alcuna inversa destra, e dunque non possiede alcuna inversa. In realta' A possiede delle inverse sinistre: tutte le matrici della forma
   $B = \begin{bmatrix} 1-q & q \end{bmatrix}.$
   Infatti si ha:
   $BA = \begin{bmatrix} 1-q & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [1-q+q] = [1].$

   (b) La matrice
   $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
   possiede come matrice inversa la matrice
   $B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix};$
   lo si verifichi per esercizio.

   (c) La matrice
   $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$
   non possiede alcuna matrice inversa; in realta' non possiede alcuna inversa sinistra e non possiede alcuna inversa destra. Lo si verifichi per esercizio.

7. **Unicita' della matrice inversa.** Se la matrice A di tipo $m \times n$ ha sia un'inversa destra B che un'inversa sinistra C, allora queste coincidono. Questo fatto si puo' dimostrare come segue:

$$C = CI_m = CAB = I_nB = B.$$

In particolare, se la matrice A possiede un'inversa, essa e' unica; l'inversa di A viene indicata con

$$A^{-1}.$$

8. **Proposizione** *Sia A una matrice invertibile; allora la matrice A e' non singolare: ciascun sistema lineare*

$$A[x] = [b],$$

avente la matrice A come matrice dei coefficienti ha esattamente una soluzione; inoltre, la soluzione e' data da

$$[x] = A^{-1}[b].$$

Dimostrazione Premoltiplicando entrambi i membri dell'equazione $A[x] = [b]$ per la matrice A^{-1} otteniamo di seguito

$$\begin{aligned} A^{-1}A[x] &= A^{-1}[b] \\ I[x] &= A^{-1}[b] \\ [x] &= A^{-1}[b], \end{aligned}$$

dunque $[x] = A^{-1}[b]$ e' l'unica possibile soluzione del sistema. Osserviamo che qui abbiamo usato il fatto che A^{-1} sia inversa sinistra di A.

Sostituendo $[x] = A^{-1}[b]$ nell'equazione $A[x] = [b]$, otteniamo

$$AA^{-1}[b] = I[b] = [b],$$

dunque $[x] = A^{-1}[b]$ e' davvero una soluzione del sistema. Osserviamo che qui abbiamo usato il fatto che A^{-1} sia inversa destra di A.

Osservazione. Dalle proposizioni

- *tutte le matrici invertibili sono non singolari;*
- *tutte le matrici non singolari sono quadrate;*

deduciamo che

- *tutte le matrici invertibili sono quadrate.*

9. **Applicazione** Sappiamo dall'esempio (b) che

   la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ *possiede inversa* $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

   Possiamo allora risolvere, per ogni b_1, b_2, il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 & = b_1 \\ x_1 + 4x_2 & = b_2 \end{cases}$$

   come segue.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\ A[x] &= [b] \\ [x] &= A^{-1}[b] \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

   La soluzione e'

$$\begin{cases} x_1 & = 4b_1 - 3b_2 \\ x_2 & = -b_1 + b_2 \end{cases}.$$

10. **Intermezzo.** Siano date due matrici moltipicabili $\underset{m\ n}{A}$ e $\underset{n\ p}{B}$. Osserviamo che

    - ciascuna colonna della matrice AB e' uguale al prodotto dell'intera matrice A per la corrispondente colonna della matrice B :

$$(AB)(:, k) = A\ B(:, k), \qquad k = 1, 2, \ldots, p.$$

    - ciascuna riga della matrice prodotto AB e' uguale al prodotto della corrispondente riga della matrice A per l'intera matrice B :

$$(AB)(i, :) = A(i, :)\ B, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

    Infatti,

$$(AB)(:, k) = \begin{bmatrix} (AB)(1, k) \\ (AB)(2, k) \\ \vdots \\ (AB)(m, k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(1, :)B(:, k) \\ A(2, :)B(:, k) \\ \vdots \\ A(m, :)B(:, k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(1, :) \\ A(2, :) \\ \vdots \\ A(m, :) \end{bmatrix} B(:, k) = A\,B(:, k).$$

    in modo analogo si prova l'altra identita'.

11. **Proposizione** *Sia A una matrice non singolare, quadrata di un certo ordine n; allora A e' invertibile.*

    Dimostrazione Proviamo soltanto che la matrice A possiede un'inversa destra. Osserviamo che una matrice B quadrata di ordine n soddisfa l'equazione
    $$AX = I_n$$
    se e solo se le colonne $B(:,1), \ldots, B(:,n)$ di B soddisfano rispettivamente le equazioni
    $$A\ X(:,1) = I_n(:,1), \quad \ldots \quad A\ X(:,n) = I_n(:,n)$$
    nelle colonne incognite $X(:,1), \ldots, X(:,n)$.

    Ora, ciscuna di queste n equazioni rappresenta un sistema lineare avente la matrice A come matrice dei coefficienti. Poiche' la matrice A e' non singolare, ciscuno di questi sistemi ha una soluzione $X(:,1) = B(:,1), \ldots, X(:,n) = B(:,n)$. Allora la matrice
    $$B = [B(:,1)\ \ldots\ B(:,n)]$$
    e' una soluzione dell'equazione $AX = I_n$, cioe' B e' un'inversa destra di A.

12. **Algoritmo di Gauss-Jordan per il calcolo della matrice inversa** Dai punti precedenti possiamo ricavare che una matrice A e' invertibile se e solo se e' quadrata di un certo ordine n e si puo' trasformare, mediante operazioni elementari sulle righe, nella matrice unita' I_n. In questo caso, la matrice
    $$[A|I_n]$$
    si puo' trasformare, mediante operazioni elementari sulle righe, in una matrice del tipo
    $$[I_n|B]$$
    e si ha $B = A^{-1}$.

    Non diamo la dimostrazione di questa affermazione. Per esercizio, si usi l'algoritmo per determinare la matrice inversa della matrice
    $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$
    e si verifichi la correttezza del risultato trovato.