Matematica II 13.03.06

Descrizione del materiale *Nella lezione si sono considerati principalmente i determinanti delle matrici di ordine 2. Si e' mostrato come il determinante sorga in modo naturale dallo studio della singolarita' di una matrice, venendo a stabilire che una matrice A e' non singolare se e solo se il suo determinante* $\det A$ *e' diverso da zero. Dopo avere identificato una matrice quadrata di ordine 2 con una coppia di punti nel piano, si e' data una interpretazione geometrica del determinante della matrice come misura con segno dell'area di un parallelogramma individuato in modo naturale dai due punti. Si sono poi enunciate e sostanzialmente dimostrate le principali proprieta' del determinante, e si sono usate queste proprieta' per ricavare la regola di Cramer per la soluzione del generico sistema lineare di due equazioni in due incognite. I punti 5 e 6 della traccia sostanzialmente non sono stati svolti. Invece, si e' data la formula generale per il determinante di una matrice quadrata di ordine* n.

Matematica II 13.03.06 **Traccia**

Sunto *Associeremo a ciscuna matrice quadrata* A *un numero* $\det A$, *detto determinante di* A, *che si annulla se e solo se la matrice e' singolare, e ne studieremo le proprieta'. Useremo i determinanti per ricavare una formula esplicita per la soluzione di un sistema lineare quadrato e per ricavare una formula esplicita per la matrice inversa. Per dare un'idea degli argomenti che scvolgeremo, riportiamo qui le definizioni e i principali risultati per i determinanti delle matrici quadrate di ordine* 2.

1. Consideriamo la generica matrice quadrata di ordine 2 :
   $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$
   Sappiamo che A e' singolare se e solo se una delle sue righe e' un multiplo dell'altra; questa condizione si puo' esprimere in funzione dei parametri a, b, c, d con la relazione $ad - bc = 0$. Il primo membro di questa relazione

viene detto *determinante* della matrice A, e viene indicato con $detA$:

$$ad - bc = detA.$$

In base a questa definizione, possiamo dire che una matrice quadrata di ordine 2 e' non singolare se e solo se il suo determinante e' diverso da 0. Osserviamo che il determinante della matrice unita' I_2 vale 1 :

$detI_2 = 1.$

2. Possiamo riscrivere la matrice A nella forma

   $A = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{bmatrix},$

   e possiamo riguardare il determinante di A

   $detA = p_1q_2 - p_2q_1$

   come una funzione di due colonne

   $P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$

   di numeri reali, cioe' di due punti nel piano. In quest'ottica, poniamo

   $A = [P\ Q],$

   $detA = det[P\ Q].$

3. **Proprieta' principali del determinante.**

   Per ogni P, P', Q, Q' punti del piano R^2 e per ogni r, s numeri reali si ha:

   (a) $det[P + P'\ Q] = det[P\ Q] + det[P'\ Q]$;
   (b) $det[rP\ Q] = r\ det[P\ Q]$;
   (c) $det[P\ Q + Q'] = det[P\ Q] + det[P\ Q']$;
   (d) $det[P\ sQ] = s\ det[P\ Q]$;
   (e) $det[P\ Q] = 0$ se $P = Q$;
   (f) $det[Q\ P] = -det[P\ Q]$;

   Le proprieta' (a) ... (d) si dicono proprieta' di bilinearita', le proprieta' (e), (f) si dicono proprieta' di alternanza e di antisimmetria.

4. **Determinante e sistemi lineari - Regola di Cramer.** Sia data una matrice

   $[P\ Q] = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{bmatrix}.$

   tale che $det[P\ Q] \neq 0$. Allora il generico sistema lineare

$$\begin{cases} p_1x_1 + q_1x_2 & = r_1 \\ p_2x_1 + q_2x_2 & = r_2 \end{cases}$$

avente $[P\ Q]$ come matrice dei coefficienti ha come unica soluzione

$$\begin{aligned} x &= \frac{det[R\ Q]}{det[P\ Q]} = \frac{r_1q_2 - r_2q_1}{p_1q_2 - p_2q_1} \\ y &= \frac{det[P\ R]}{det[P\ Q]} = \frac{p_1r_2 - p_2r_1}{p_1q_2 - p_2q_1}. \end{aligned}$$

5. **Determinante e matrice inversa.** Sia data una matrice
   $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$
   tale che $detA \neq 0$. Allora la matrice A e' invertibile e la sua matrice inversa e' data da
   $$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

6. **Determinante e prodotto di matrici - Teorema di Binet.** Per ogni A, B matrici quadrate dello stesso ordine, il determinante della matrice prodotto AB e' uguale al prodotto dei determinanti delle matrici fattori A, B :
   $$det(AB) = det(A)det(B).$$

Matematica II 13.03.06 **Appunti**

1. **Definizione.** Consideriamo la generica matrice quadrata di ordine 2 :
   $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
   e chiediamoci:

   sotto quali condizioni sui parametri a, b, c, d la matrice A e' non singolare?

   In altri termini:

   sotto quali condizioni sui parametri a, b, c, d il generico sistema lineare
   $$\begin{cases} ax + by &= r \\ cx + dy &= s \end{cases}$$
   avente A come matrice dei coefficienti e' determinato?

   Per semplicita', assumiamo che $b, d \neq 0$. Osserviamo che nel piano R^2 la prima equazione rappresenta la generica retta avente pendenza $-a/b$, e la seconda equazione rappresenta la generica retta avente pendenza $-c/d$. La domanda diviene allora:

sotto quali condizioni sui parametri a, b, c, d la generica retta avente pendenza $-a/b$, e la generica retta avente pendenza $-c/d$ hanno esttamente un punto in comune?

La risposta e': quando le due rette hanno pendenze diverse:

$-\frac{a}{b} \neq -\frac{c}{d}$

cioe'

$ad - cb \neq 0.$

L'espressione $ad - cb$ viene detta *determinante* della matrice A, e viene indicata con $detA$:

$$detA = det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb.$$

In base a questa definizione, possiamo dire che

una matrice A quadrata di ordine 2 e' non singolare se e solo se $detA \neq 0$.

Esempi.

$det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 7;$

$det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1;$

$det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1;$

$det \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = 0.$

2. **Significato geometrico.** Possiamo riscrivere la matrice A nella forma

   $A = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{bmatrix} = [P\ Q],$

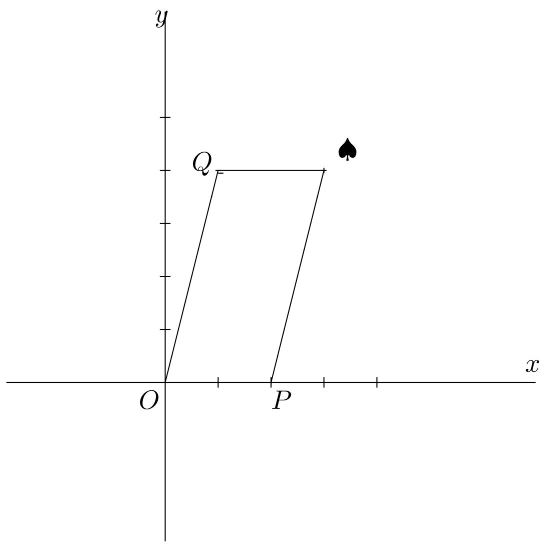
   dove $P = \left[\begin{smallmatrix} p_1 \\ p_2 \end{smallmatrix}\right]$ e $Q = \left[\begin{smallmatrix} q_1 \\ q_2 \end{smallmatrix}\right]$, e possiamo riguardare il determinante di A

   $detA = det[P\ Q] = p_1q_2 - p_2q_1$

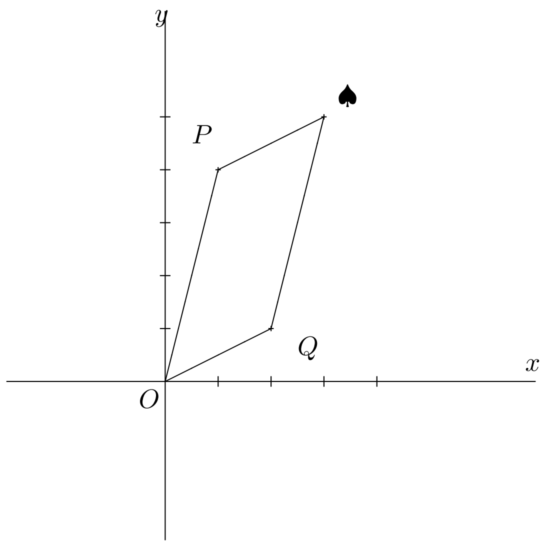
   come una funzione delle due colonne P e Q, cioe' come una funzione di due punti nel piano.

   Esempio.

   $det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 8, \qquad P = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \quad Q = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right]$



Esempio.
$det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = -7;$



Il determinante di una coppia di punti P, Q e' l'area, con segno, del parallelogramma POQ♠ che chiude la spezzata POQ; il segno e' positivo se la rotazione che porta la semiretta OP nella semiretta OQ ha lo stesso verso della rotazione che porta l'asse x nell'asse delle y, il segno e' negativo se la rotazione che porta la semiretta OP nella semiretta OQ ha lo verso opposto alla rotazione che porta l'asse x nell'asse delle y.

3. **Proprieta' principali del determinante.**

   Per ogni P, P', Q, Q' punti del piano R^2 e per ogni r, s numeri reali si ha:

   (a) $det[P + P' \ Q] = det[P \ Q] + det[P' \ Q]$;

   (b) $det[rP \ Q] = r \ det[P \ Q]$;

   (c) $det[P \ Q + Q'] = det[P \ Q] + det[P \ Q']$;

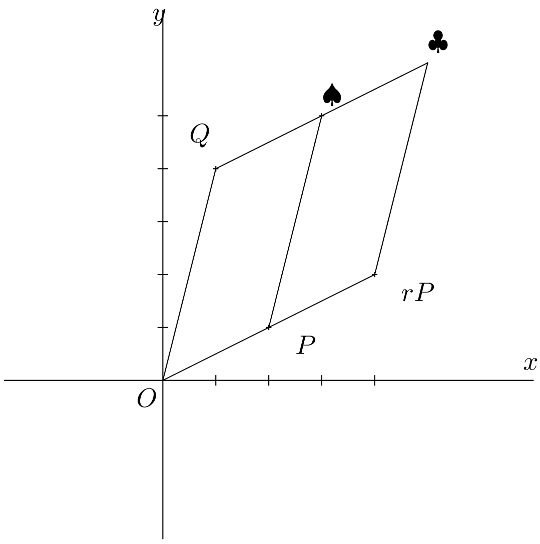
   (d) $det[P \ sQ] = s \ det[P \ Q]$;

   (e) $det[P \ Q] = 0$ se $P = Q$;

   (f) $det[Q \ P] = -det[P \ Q]$;

   Le proprieta' (a) ... (d) si dicono proprieta' di bilinearita', le proprieta' (e), (f) si dicono proprieta' di alternanza e di antisimmetria.

   Ciascuna di queste proprieta' ha un significato geometrico. Ad esempio, la proprieta' (b) puo' essere letta cosi': dilatando il lato OP del parallelogramma $POQ\spadesuit$ secondo un coefficiente r, l'area del parallelogramma risulta moltiplicata per lo stesso coefficiente r.



   Le proprieta' (e) ed (f) si possono leggere cosi': quando il punto P viene a coincidere col punto Q, il parallelogramma $POQ\spadesuit$ degenera, e viene cosi' ad avere area nulla; scambiando i punti P e Q, cambia il verso della rotazione che porta la retta OP sulla retta OQ, e cosi' l'area segnata del parallelogramma POQ♠ cambia segno.

Verifichiamo ora algebricamente le prime due proprieta'.

(a)

$$\begin{aligned}
det[P + P'\ Q] &= det \begin{bmatrix} p_1 + p'_1 & q_1 \\ p_2 + p'_2 & q_2 \end{bmatrix} \\
&= (p_1 + p'_1)q_2 - (p_2 + p'_2)q_1 \\
&= p_1q_2 - p_2q_1 + p'_1q_2 - p'_2q_1 \\
&= det \begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{bmatrix} + det \begin{bmatrix} p'_1 & q_1 \\ p'_2 & q_2 \end{bmatrix} = det[P\ Q] + det[P'\ Q]
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
det[rP\ Q] &= det \begin{bmatrix} rp_1 & q_1 \\ rp_2 & q_2 \end{bmatrix} \\
&= rp_1q_2 - rp_2q_1 \\
&= r(p_1q_2 - p_2q_1) \\
&= r\ det \begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{bmatrix} = r\ det[P\ Q]
\end{aligned}$$

4. **Determinante e sistemi lineari - Regola di Cramer.** Sia data una matrice
$[P\ Q] = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{bmatrix}.$
tale che $det[P\ Q] \neq 0$. Allora il generico sistema lineare

$$\begin{cases} p_1x_1 + q_1x_2 & = r_1 \\ p_2x_1 + q_2x_2 & = r_2 \end{cases}$$

avente $[P\ Q]$ come matrice dei coefficienti ha come unica soluzione

$$\begin{aligned}
x &= \frac{det[R\ Q]}{det[P\ Q]} = \frac{r_1q_2 - r_2q_1}{p_1q_2 - p_2q_1} \\
x_2 &= \frac{det[P\ R]}{det[P\ Q]} = \frac{p_1r_2 - p_2r_1}{p_1q_2 - p_2q_1}.
\end{aligned}$$

Dimostrazione Riscriviamo il sistema nella forma

$$\begin{bmatrix} p_1x_1 + q_1x_2 \\ p_2x_1 + q_2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix},$$

poi piu' brevemente nella forma

$$Px_1 + Qx_2 = R.$$

Osserviamo che

(a)

$$\begin{aligned} det[R\ Q] &= det[Px_1 + Qx_2\ Q] \\ &= det[Px_1\ Q] + det[Qx_2\ Q] \\ &= x_1det[P\ Q] + x_2det[Q\ Q] \\ &= x_1det[P\ Q], \end{aligned}$$

cioe'

$$det[R\ Q] = x_1det[P\ Q];$$

da questa uguaglianza, essendo $det[P\ Q] \neq 0$, possiamo ricavare

$$x_1 = \frac{det[R\ Q]}{det[P\ Q]} = \frac{r_1q_2 - r_2q_1}{p_1q_2 - p_2q_1}.$$

(b)

$$\begin{aligned} det[P\ R] &= det[P\ Px_1 + Qx_2] \\ &= det[P\ Px_1] + det[P\ Qx_2] \\ &= x_1det[P\ P] + x_2det[P\ Q] \\ &= x_2det[P\ Q], \end{aligned}$$

cioe'

$$det[P\ R] = x_2det[P\ Q];$$

da questa uguaglianza, essendo $det[P\ Q] \neq 0$, possiamo ricavare

$$x_2 = \frac{det[P\ R]}{det[P\ Q]} = \frac{p_1r_2 - p_2r_1}{p_1q_2 - p_2q_1}.$$

5. **Esercizio** Consideriamo il sistema lineare del punto precedente, assumiamo che tutti i coefficienti p_1, p_2, q_1, q_2 siano non nulli, e chiediamoci cosa possiamo dire delle componenti x_1 e x_2 della soluzione quando $p_1 \to +\infty$ mentre p_2, q_1, q_2 restano costanti.

Dalla formula esplicita abbiamo

$$lim_{p_1 \to +\infty} \; x_1 = \frac{r_1q_2 - r_2q_1}{p_1q_2 - p_2q_1} = 0,$$

e

$$lim_{p_1 \to +\infty} \; x_2 = \frac{p_1r_2 - p_2r_1}{p_1q_2 - p_2q_1} = \frac{r_2}{q_2}.$$

6. **Generalizzazione** Ci apprestiamo ora a dare una definizione per il determinante di una matrice quadrata di ordine n qualsiasi. Si puo' pensare che questa espressione sorga dallo studio della non singolarita' della generica matrice quadrata di ordine n

$$A = \begin{bmatrix} A(1,1) & A(1,2) & \dots & A(1,n) \\ A(2,1) & A(2,2) & \dots & A(2,n) \\ & & \vdots & \\ A(n,1) & A(n,2) & \dots & A(n,n) \end{bmatrix}.$$

In questa notazione, il determinante di una matrice quadrata di ordine 2 si scrive

$$detA = det \begin{bmatrix} A(1,1) & A(1,2) \\ A(2,1) & A(2,2) \end{bmatrix} = A(1,\bar{1})A(2,\bar{2}) - A(2,\bar{1})A(1,\bar{2}).$$

Osserviamo che: in ciascuno dei due addendi gli indici di destra sono 1 e 2, sempre in questo ordine; nel primo addendo gli indici di sinistra sono 1 e 2, e questo addendo viene preso con segno positivo; nel secondo addendo gli indici di sinistra sono 2 e 1, e questo addendo viene preso con segno negativo.

7. **Permutazioni.** Una parola $i_1i_2i_3$ nei simboli $1, 2, 3$ che contenga ciascun simbolo esttamente una volta viene detta *permutazione* dell'insieme dei simboli $1, 2, 3$. Una coppia di simboli i_pi_q con $p < q$ e $i_p > i_q$ viene detta *inversione* della permutazione $i_1i_2i_3$; il segno

$sg(i_1i_2i_3)$

della permutazione e' $+1$ se il numero delle sue inversioni e' pari ed e' -1 se il numero delle sue inversioni e' dispari.

permutazione	*inversioni*	*numero inversioni*	*segno*
123		0	+
132	32	1	−
213	21	1	−
231	21, 31	2	+
312	31, 32	2	+
321	32, 31, 21	3	−

Una parola $i_1 i_2 \dots i_n$ nei simboli $1, 2, \dots, n$ che contenga ciascun simbolo esttamente una volta viene detta *permutazione* dell'insieme dei simboli $1, 2, \dots, n$. Una coppia di simboli $i_p i_q$ con $p < q$ e $i_p > i_q$ viene detta *inversione* della permutazione $i_1 i_2 \dots i_n$; il segno

$sg(i_1 i_2 \dots i_n)$

della permutazione e' $+1$ se il numero delle sue inversioni e' pari ed e' -1 se il numero delle sue inversioni e' dispari.

8. **Definizione di determinante del terzo ordine**

   Definiamo il determinante di una matrice A quadrata di ordine 3 nel modo seguente:

   $detA =$

   $+A(1,\bar{1})A(2,\bar{2})A(3,\bar{3})$

   $-A(1,\bar{1})A(3,\bar{2})A(2,\bar{3})$

   $-A(2,\bar{1})A(1,\bar{2})A(3,\bar{3})$

   $+A(2,\bar{1})A(3,\bar{2})A(1,\bar{3})$

   $+A(3,\bar{1})A(1,\bar{2})A(2,\bar{3})$

   $-A(3,\bar{1})A(2,\bar{2})A(1,\bar{3})$

   In breve:

   $$detA = \sum sg(i_1 i_2 i_3) A(i_1,\bar{1})A(i_2,\bar{2})A(i_3,\bar{3}),$$

   dove la somma e' estesa a tutte le permutazioni $i_1 i_2 i_3$ dei simboli $1, 2, 3$.

9. **Determinante di ordine n**

   Definiamo il determinante di una matrice A quadrata di ordine n nel modo seguente:

   $$detA = \sum sg(i_1 i_2 \dots i_n) A(i_1,\bar{1})A(i_2,\bar{2}) \cdots A(i_n,\bar{n}),$$

   dove la somma e' estesa a tutte le permutazioni $i_1 i_2 \dots i_n$ dei simboli $1, 2, \dots, n$.

   Come vedremo, tutte le proprieta' e i risultati visti per i determinanti di ordine 2 si estendono ai determinati di ordine n.