Matematica II 17.03.06 **Appunti**

Sunto *Nella lezione si e' mostrato come i risultati visti per i determinanti del secondo ordine si estendono ai determinanti del terzo ordine, e si sono mostrati alcuni altri risultati che nel caso 2 non erano emersi. Tutti i risultati descritti per i determinanti delle matrici di ordine 3 si estendono, mutatis mutandis, ai determinanti delle matrici di ordine n qualsiasi. Queste estensioni si possono anche trovare nei vari dizionari disponibili in rete, ad esempio quello al sito*

www.wikipedia.org

1. Consideriamo la generica matrice quadrata del terzo ordine

   $A: \ A(i,j), \qquad i = 1,2,3, \ j = 1,2,3$

   per la quale abbiamo definito il determinante come l'espressione

   $$detA = \sum sg(i_1 i_2 i_3)A(i_1,1)A(i_2,2)A(i_3,3),$$

   dove la somma e' estesa a tutte le permutazioni $i_1 i_2 i_3$ dei simboli $1,2,3$; per esteso:

   $detA =$

   $+A(1,1)A(2,2)A(3,3)$

   $-A(1,1)A(3,2)A(2,3)$

   $-A(2,1)A(1,2)A(3,3)$

   $+A(2,1)A(3,2)A(1,3)$

   $+A(3,1)A(1,2)A(2,3)$

   $-A(3,1)A(2,2)A(1,3)$

   Si puo' provare che, passando dalla matrice A alla sua *trasposta*

   $A^T: \ A^T(i,j) = A(j,i), \qquad i = 1,2,3, \ j = 1,2,3,$

   il determinante non cambia:

   $$detA = detA^T.$$

   Cio' comporta che ad ogni risultato che stabiliremo in seguito per il determinante di una matrice come funzione delle sue colonne corrisponde un analogo risultato per il determinante di una matrice come funzione delle sue righe.

   Nel seguito, useremo il termine "linea" per significare "riga" oppure "colonna", ed useremo l'espressione "due linee parallele" per significare "due righe diverse" oppure "due colonne diverse".

Esempio

$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}$

$detA =$

$+1 \cdot 5 \cdot 10$

$-1 \cdot 6 \cdot 8$

$-2 \cdot 4 \cdot 10$

$+2 \cdot 6 \cdot 7$

$+3 \cdot 4 \cdot 8$

$-3 \cdot 5 \cdot 7 =$

$50 - 48 - 80 + 84 + 96 - 105 = -3$

$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$

$detA =$

$+1 \cdot 5 \cdot 10$

$-1 \cdot 8 \cdot 6$

$-4 \cdot 2 \cdot 10$

$+4 \cdot 8 \cdot 3$

$+7 \cdot 2 \cdot 6$

$-7 \cdot 5 \cdot 3 =$

$50 - 48 - 80 + 96 + 84 - 105 = -3$

2. Consideriamo la generica matrice quadrata del terzo ordine
$A = \begin{bmatrix} A(1,1) & A(1,2) & A(1,3) \\ A(2,1) & A(2,2) & A(2,3) \\ A(3,1) & A(3,2) & A(3,3) \end{bmatrix}.$
Dati un indice di riga i e un indice di colonna j, possiamo considerare la sottomatrice, quadrata di ordine 2, ottenuta dalla matrice A cancellando la riga $i-$ma e la colonna $j-$ma, e possimo indicare questa sottomatrice col simbolo $A(\hat{i}, \hat{j})$. Ad esempio, avremo
$$A(\hat{2}, \hat{1}) = \begin{bmatrix} & A(1,2) & A(1,3) \\ & & \\ & A(3,2) & A(3,3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(1,2) & A(1,3) \\ A(3,2) & A(3,3) \end{bmatrix}.$$

Il determinante della matrice $A(\hat{\imath}, \hat{\jmath})$ viene detto *minore complementare* dell'elemento $A(i,j)$ della matrice A. Ad esempio, il minore complementare dell'elemento $A(2,1)$, e'

$$detA(\hat{2},\hat{1}) = A(1,2)A(3,3) - A(3,2)A(1,3).$$

Analizzando il determinante di A si possono ricavare la uguaglianze

$$\begin{aligned}
&detA = \\
&+A(1,1)\ detA(\hat{1},\hat{1}) \\
&-A(2,1)\ detA(\hat{2},\hat{1}) \\
&+A(3,1)\ detA(\hat{3},\hat{1}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&detA = \\
&-A(1,2)\ detA(\hat{1},\hat{2}) \\
&+A(2,2)\ detA(\hat{2},\hat{2}) \\
&-A(3,2)\ detA(\hat{3},\hat{2}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&detA = \\
&+A(1,3)\ detA(\hat{1},\hat{3}) \\
&-A(2,3)\ detA(\hat{2},\hat{3}) \\
&+A(3,3)\ detA(\hat{3},\hat{3}),
\end{aligned}$$

che vengono dette *sviluppi di Laplace* del determinate di A secondo la prima, la seconda, e la terza colonna. Ciascuna di queste espansioni puo' essere letta nel modo seguente:

il determinate di una matrice di ordine 3 si puo' scrivere come la somma, con segno, dei prodotti degli elementi di una delle sue 3 colonne per i corrispondenti complementi algebrici; il segno e' $+$ *se la somma degli indici dell'elemento e' pari, il segno e'* $-$ *se la somma degli indici dell'elemento e' dispari.*

Ciascuno di questi sviluppi permette di ricondurre il calcolo di un determinante del terzo ordine al calcolo di determinanti del secondo ordine.

Esempio.

Sviluppando il determinante rispetto alla prima colonna si ha:

$$det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix} = 1 \cdot det \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} - 2 \cdot det \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + 3 \cdot det \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$= (5 \cdot 8 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 8 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = -8 + 20 - 9 = 3$$

Sviluppando il determinante rispetto alla seconda colonna si ha:

$$det\begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&8\end{bmatrix}=-4\cdot det\begin{bmatrix}2&8\\3&8\end{bmatrix}+5\cdot det\begin{bmatrix}1&7\\3&8\end{bmatrix}-6\cdot det\begin{bmatrix}1&7\\2&8\end{bmatrix}=$$

$$=-4\cdot(2\cdot 8-3\cdot 8)+5\cdot(1\cdot 8-3\cdot 7)-6\cdot(1\cdot 8-2\cdot 7)=+32-65+36=3$$

Esempio.

Sviluppando il determinante rispetto alla prima colonna si ha:

$$det\begin{bmatrix}1&4&7\\0&5&8\\0&0&8\end{bmatrix}=1\cdot det\begin{bmatrix}5&8\\0&8\end{bmatrix}=40$$

Osserviamo che il determinate della generica matrice triangolare superiore e' uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale discendente:

$$det\begin{bmatrix}a&b&c\\0&d&e\\0&0&f\end{bmatrix}=adf.$$

3. Possiamo riscrivere la matrice A nella forma

$$A=\begin{bmatrix}p_1&q_1&r_1\\p_2&q_2&r_2\\p_3&q_3&r_3\end{bmatrix}=[P\ Q\ R]$$

e possiamo riguardare il determinante di A

$detA=det[P\ Q\ R]=\sum sg(ijk)\ p_i\ q_j\ r_k,$

dove la somma e' estesa a tutte le permutazioni ijk dei simboli $1,2,3$, come una funzione di tre colonne P,Q,R di numeri reali, cioe' di tre punti nello spazio.

Si prova che il determinante della matrice $A=[P\ Q\ R]$ e' la misura, con un segno opportunamente definito (regola dell mano destra), del parallelepipedo avente spigoli OP,OQ,OR, dove O e' l'origine del sistema di riferimento.

4. **Proprieta' principali del determinante.**

Per ogni P,P',Q,Q',R,R' punti dello spazio R^3 e per ogni p,q,r numeri reali si ha:

(a) $det[P+P'\ \ Q\ \ R]=det[P\ Q\ R]+det[P'\ Q\ R]$;

(b) $det[P\ \ Q+Q'\ \ R]=det[P\ Q\ R]+det[P\ Q'\ R]$;

(c) $det[P\ \ Q\ \ R+R']=det[P\ Q\ R]+det[P\ Q\ R']$;

(d) $det[pP\ Q\ R]=p\ det[P\ Q\ R]$;

(e) $det[P\ qQ\ R]=q\ det[P\ Q\ R]$;

(f) $det[P\ Q\ rR] = r\ det[P\ Q\ R]$;

(g) $det[P\ Q\ R] = 0$ se $P = Q$ o $P = R$ o $Q = R$.

(h) $det[Q\ P\ R] = -det[P\ Q\ R]$;
$det[R\ Q\ P] = -det[P\ Q\ R]$;
$det[P\ R\ Q] = -det[P\ Q\ R]$;

Le proprieta' (a) ... (f) si dicono proprieta' di trilinearita', le proprieta' (g), (h) si dicono proprieta' di alternanza e di antisimmetria.

5. **Determinante ed operazioni elementari sulle linee** Dal punto precedente si puo' ricavare che l'azione delle operazioni elementari sulle linee di una matrice A del terzo ordine

   - sommare ad una linea un multiplo di un'altra linea parallela,
   - moltiplicare una linea per un numero reale $p \neq 0$
   - scambiare due linee parallele

   ha sul determinate $detA$ della matrice l'effetto di

   - lasciare $detA$ invariato,
   - moltiplicare $detA$ per p
   - cambiare il segno di $detA$.

   Verifichiamo queste proprieta' nel caso delle colonne. Il fatto che l'azione di moltiplicare una colonna di A per un numero p abbia l'effetto di moltiplicare $detA$ per p e' assicurato dalle proprieta' (d), (e), (f) del punto precedente; il fatto che l'azione di scambiare due colonne di A abbia l'effetto di cambiare il segno di $detA$ e' assicurato dalla proprieta' (h) del punto precedente.

   Proviamo ora che l'azione di sommare ad una colonna della matrice A un multiplo di un'altra colonna lascia invariato $detA$; piu' precisamente, proviamo ora che l'azione di sommare alla seconda colonna Q della matrice $[P\ Q\ R]$ un multiplo pP della prima colonna lascia invariato $det[P\ Q\ R]$; gli altri casi sono analoghi.

$$\begin{aligned} det[P\ \ Q + pP'\ \ R] &= det[P\ Q\ R] + det[P\ pP\ R] \\ &= det[P\ Q\ R] + p\ det[P\ P\ R] = det[P\ Q\ R]. \end{aligned}$$

   Data una matrice numerica A, possiamo trasformare A, mediante operazioni elementari del tipo (a) e (b), in una matrice triangolare A'; ora, il determinante di A' e' il prodotto dei suoi elementi sulla diagonale principale, e $detA' = \pm detA$. Questo e', in realta', il modo piu' efficiente di calcolare il determinante di una matrice numerica.

Esempio.

$$det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -13 \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 3.$$

L'analisi di questo processo permette di stabilire il seguente

Teorema. *Una matrice A quadrata del terzo ordine e' non singolare se e solo se $detA \neq 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo che la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

sia non singolare. Allora, applicando ad A il processo di triangolarizzazione, si ottiene una matrice triangolare non degenere

$$A' = \begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ 0 & e' & f' \\ 0 & 0 & i' \end{bmatrix}, \qquad a', e', i' \neq 0.$$

Ora, si ha

$detA = \pm detA' = \pm a'e'i' \neq 0.$

Se invece A e' singolare, allora uno dei tre numeri a', e', i' e nullo, e si ha

$detA = \pm detA' = \pm a'e'i' = 0.$

6. **Determinante e sistemi lineari - Regola di Cramer.** Sia data una matrice

$$[P\ Q\ R] = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{bmatrix}$$

tale che $det[P\ Q\ R] \neq 0$. Allora il generico sistema lineare

$$\begin{cases} p_1x_1 + q_1x_2 + r_1x_3 & = s_1 \\ p_2x_1 + q_2x_2 + r_2x_3 & = s_2 \\ p_3x_1 + q_3x_2 + r_3x_3 & = s_3 \end{cases}$$

avente $[P\ Q\ R]$ come matrice dei coefficienti ha come unica soluzione

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{det[S\ Q\ R]}{det[P\ Q\ R]} \\ x_2 &= \frac{det[P\ S\ R]}{det[P\ Q\ R]} \\ x_3 &= \frac{det[P\ Q\ S]}{det[P\ Q\ R]}. \end{aligned}$$

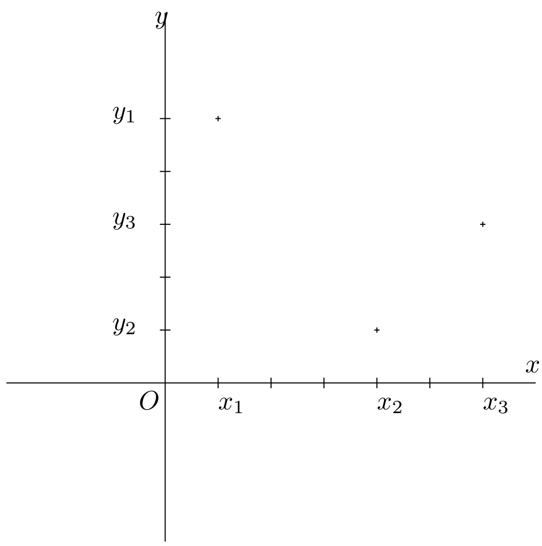
7. **Problema.** Sono dati sei numeri reali $x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3$, e si vuole determinare un polinomio

$f(x) = a + bx + cx^2$

di grado al piu' 2 tale che

$f(x_i) = y_i, \qquad i = 1, 2, 3.$

Ci si chiede: sotto quali condizioni esiste un tale polinomio? nei casi in cui esiste, ne esiste esattamente uno? nei casi in cui ne esiste esattamente uno, in che modo i coefficienti del polinomio dipendono dai dati iniziali?



Per evitare condizioni fra loro contraddittorie, o ripetute, imponiamo la condizione che i tre numeri x_1, x_2, x_3 siano a due a due distinti:

$x_1 \neq x_2, \quad x_1 \neq x_3, \quad x_2 \neq x_3.$

Ora, le tre condizioni imposte si traducono nel sistema lineare

$$\begin{cases} a + bx_1 + cx_1^2 & = y_1 \\ a + bx_2 + cx_2^2 & = y_2 \\ a + bx_3 + cx_3^2 & = y_3 \end{cases}$$

nelle incognite a, b, c. Calcoliamo ora il determinante della matrice dei coefficienti:

$$det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \quad = \quad det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \\ 0 & x_3 - x_1 & (x_3 - x_1)(x_3 + x_1) \end{bmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 1 & x_3 + x_1 \end{bmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_2 \end{bmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).
\end{aligned}
$$

Sotto le condizioni imposte

$x_1 \neq x_2, \quad x_1 \neq x_3, \quad x_2 \neq x_3,$

questo determinante e' non nullo. Dunque il sistema lineare ha, per ogni valore di y_1, y_2, y_3, esattamente una soluzione, data da

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{det \begin{bmatrix} y_1 & x_1 & x_1^2 \\ y_2 & x_2 & x_2^2 \\ y_3 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}}{det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}} \\
b &= \frac{det \begin{bmatrix} 1 & y_1 & x_1^2 \\ 1 & y_2 & x_2^2 \\ 1 & y_3 & x_3^2 \end{bmatrix}}{det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}} \\
c &= \frac{det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}}{det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}}.
\end{aligned}
$$

Svolgiamo i calcoli solo per l'incognita c; otteniamo:

$$
c = \frac{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.
$$

8. **Esercizio.** Utilizzando i risultati del punto precedente, si determini il polinomio

   $f(x) = a + bx + cx^2$

   di grado al piu' 2 tale che

   $f(1) = 5, \quad f(4) = 1, \quad , f(6) = 3.$

9. **Determinante e matrice inversa.** Sia data una matrice

   $A = \begin{bmatrix} A(1,1) & A(1,2) & A(1,3) \\ A(2,1) & A(2,2) & A(2,3) \\ A(3,1) & A(3,2) & A(3,3) \end{bmatrix}.$

   tale che $detA \neq 0$. Allora la matrice A e' invertibile e la sua matrice inversa e' data da

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \begin{bmatrix} detA(\hat{1},\hat{1}) & detA(\hat{2},\hat{1}) & detA(\hat{3},\hat{1}) \\ detA(\hat{1},\hat{2}) & detA(\hat{2},\hat{2}) & detA(\hat{3},\hat{2}) \\ detA(\hat{1},\hat{3}) & detA(\hat{2},\hat{3}) & detA(\hat{3},\hat{3}) \end{bmatrix}.$$