Matematica II 20.03.06

Descrizione del materiale *Nella lezione si sono considerati gli spazi vettoriali R^2 ed R^3, si sono date le interpretazioni geometriche delle operazioni di somma di due vettori e di prodotto di un vettore per un numero reale, e si sono introdotte le nozioni di "base di uno spazio vettoriale", "spazio generato da un insieme di vettori", "insieme linearmente dipendente/indipendente", descritte nei primi 3 punti della traccia.*

Matematica II 20.03.06 **Traccia**

Sunto *Nella lezione considereremo l'algebra dell'insieme R^n delle $n-$ple ordinate di numeri reali con le operazioni di somma di due $n-$ple e di prodotto di un nimero reale per una $n-$pla, in breve lo spazio vettoriale R^n. Daremo una nozione che generalizza la nozione di sistema di riferimento e la studieremo fino al punto di precisare la nozione di dimensione. Nella traccia qui sotto riportata sono delineati i concetti generali; nella lezione si considereranno in primo luogo i casi del piano R^2 e dello spazio R^3.*

1. Un insieme A formato da m vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m$ di R^n si dice *base di* R^n se ogni vettore v di R^n si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare

   $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m$

   dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m$.

   Esempio I vettori

   $$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \ldots \qquad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

   formano una base, detta *base canonica* di R^n.

2. Sia A un insieme formato da m vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m$ di R^n. L'insieme di tutte le combinazioni lineari

   $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m$

   dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m$ viene detto *spazio generato da A*.

3. **Definizione**

   Sia A un insieme formato da m vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m$ di R^n. Se ciascuno dei vettori v_i non appartiene allo spazio generato dagli altri vettori $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_m$, allora diciamo che l'insieme A e' *linearmente indipendente*; altrimenti, diciamo che A e' *linearmente dipendente*.

4. **Teorema**

   Sia A un insieme formato da m vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m$ di R^n.

   - L'insieme A e' linearmente dipendente se e solo se i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m$ soddisfano una relazione lineare

     $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$

     non banale, nella quale qualche coefficiente λ_i e' diverso da 0.

   - L'insieme A e' linearmente indipendente se e solo se l'unica relazione lineare

     $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$

     soddisfatta dai vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m$ e' la relazione banale, nella quale tutti i coefficienti λ_i sono 0..

5. **Teorema**

   Siano $v_1, v_2, \ldots, v_m, v$ vettori di R^n. Se l'insieme A formato dai vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m$ e' linearmente indipendente, mentre l'insieme B formato dai vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m, v$ e' linearmente dipendente, allora il vettore v appartiene allo spazio generato dall'insieme A.

6. **Teorema**

   Sia A un insieme formato da m vettori di R^n.

   - *Se A e' linearmente indipendente, allora $m \leq n$;*
   - *se A e' linearmente indipendente e $m < n$, allora A non e' una base per R^n.*
   - *se A e' linearmente indipendente e $m = n$, allora A e' una base per R^n.*

   Da questo teorema segue, in particolare che

   - *Tutte le basi di R^n sono formate da n vettori.*

   Esprimiamo questo fatto dicendo che *lo spazio vettoriale R^n ha dimensione n.*

Matematica II 20.03.06 **Appunti**

1. Ciascuna $n-$pla ordinata $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di numeri reali verra' d'ora in poi rappresentata come una matrice colonna

   $$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

   e detta "vettore" di R^n; i numeri reali verranno detti "scalari". Sui vettori sono definite due operazioni:

   - somma di due vettori di R^n, che fornisce un vettore di R^n;
   - prodotto di un vettore di R^n per uno scalare, che fornisce un vettore di R^n.

   Queste operazioni godono delle usuali proprieta' del calcolo algebrico, l'unica differenza e' che certe operazioni, come addizione di uno scalare ed un vettore, e moltiplicazione di due vettori non sono definite (tranne che nel caso $n = 1$).

   La struttura algebrica costituita da R^n munito di queste operazioni verra' detta *spazio vettoriale* R^n. Gli spazi vettoriali R^2 ed R^3 sono gli ordinari spazi della fisica; spesso in essi preferiremo il termine "punto" al termine "vettore"; i punti verranno rappresentati da simboli maiuscoli come $P, Q, R, \ldots$

2. **Interpretazione geometrica delle operazioni sui punti di** R^2

   Nel piano R^2, consideriamo i punti

   $$P = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

   ne calcoliamo la somma

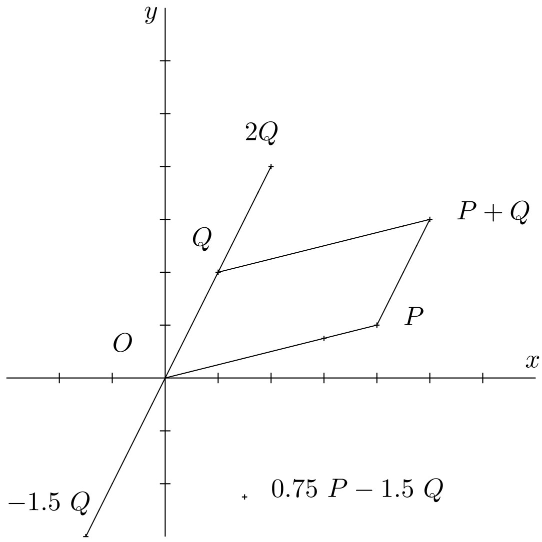
   $$P + Q = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix},$$

   e la rappresentiamo nel piano.

   Possiamo allora osservare che i punti $O, P, Q, P+Q$ sono i vertici di un parallelogramma. Possiamo renderci conto di questo fatto nel modo seguente:

   - il segmento orientato da P verso $P + Q$ e il segmento orientato da O verso Q rappresentano lo stesso spostamento di "1 unita' a destra e 2 unita' in alto";

- il segmento orientato da Q verso $P+Q$ e il segmento orientato da O verso P rappresentano lo stesso spostamento di "4 unita' a destra e 1 unita' in alto".



Moltiplichiamo ora il punto Q per gli scalari 2 e -1.5

$2\ Q = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad -1.5\ Q = -1.5 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ -3 \end{bmatrix}$

e rappresentiamo i punti ottenuti nel piano.

Possiamo osservare che: i punti $2Q$ e $-1.5Q$ appartengono retta per O e Q; il punto $2Q$ dista da O due volte quanto Q dista da O, e sta dalla stessa parte di Q rispetto ad O; il punto $-1.5Q$ dista da O una volta e mezzo quanto Q dista da O, e sta dalla parte opposta di Q rispetto ad O.

Siamo cosi' condotti ad affermare che i punti del tipo

$\alpha\ Q$

descrivono, al variare del numero α in R, l'intera retta per O e Q; per $\alpha \geq 0$ si hanno i punti della semiretta con origine O che contiene Q, per $\alpha \leq 0$ si hanno i punti della semiretta con origine O che non contiene Q.

In generale, possiamo considerare un'espressione del tipo

$\alpha\ P + \beta\ Q, \qquad \alpha, \beta \in R,$

che viene detta *combinazione lineare di P e Q con pesi α e β.*

3. **Sistemi di riferimento in R^2**

Nel piano R^2 abbiamo due punti privilegiati: i punti unita' sugli assi coordinati

$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Osserviamo che, per ogni punto

$R = \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$

del piano, si ha

$R = \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = s\ E_1 + t\ E_2.$

Possiamo dunque dire che

(a) *ogni punto del piano R^2 si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei punti unita' E_1, E_2.*

Osserviamo che i pesi di questa combinazione lineare sono le coordinate del punto rispetto al sistema di riferimento.

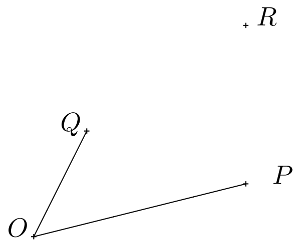
Anche i punti P, Q posseggono la proprieta' (a).

Possiamo renderci conto geometricamnte di questo fatto nel modo seguente. Dato un qualsiasi punto R del piano, possiamo: tracciare la retta per R parallela alla retta OQ ed intersecarla con la retta OP, ottenendo cosi' un punto rappresentabile nella forma αP; tracciare la retta per R parallela alla retta OP ed intersecarla con la retta OQ, ottenendo cosi' un punto rappresentabile nella forma βQ. Per costruzione, i punti $O, \alpha P, \beta Q, R$ sono i vertici di un parallelogramma e si ha

$R = \alpha\ P + \beta\ Q,$

inoltre questa e' l'unica scrittura di R come combinazione lineare di P e Q. I pesi α e β in questa combinazione lineare si potranno a buon diritto chiamare coordinate di R rispetto al sistema di riferimento dato da O, P, Q.

Per esercizio, si svolga la costruzione geometrica sulla figura seguente, e si dia una stima approssimativa dei pesi α e β.



Possiamo renderci conto algebricamente del fatto che i punti P, Q posseggono la proprieta' (a) nel modo seguente. Posto

$$R = \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix},$$

cerchiamo dei numeri reali α e β tali che

$$R = \alpha\ P + \beta\ Q.$$

Ora, si ha

$$\alpha\ P + \beta\ Q = \alpha\ \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta\ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\alpha + \beta \\ \alpha + 2\beta \end{bmatrix}.$$

Dunque α e β devono verificare l'uguaglianza

$$\begin{bmatrix} 4\alpha + \beta \\ \alpha + 2\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix},$$

cioe' devono essere soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} 4\alpha + \beta & = s \\ \alpha + 2\beta & = t \end{cases}$$

Osserviamo che: i coefficienti dell'incognita α sono le componenti di P, i coefficienti dell'incognita β sono le componenti di Q, i termini noti sono le componenti di R.

Ora, si vede subito (perche?) che questo sistema ha una ed una sola soluzione, comunque siano r, s. Dunque veramente ogni punto del piano si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare di P e Q.

4. **Definizione - Base di** R^n. *Un insieme A formato da m vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m$ di R^n si dice base di R^n se ogni vettore v di R^n si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare*

   $$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m$$

dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Il peso α_i del vettore v_i nella scrittura di sopra si dice coordinata $i-$ma del vettore v rispetto alla base A.

Esempi

- I vettori
  $E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
  formano una base, detta *base canonica*, di R^2.
- I vettori
  $P = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
  formano una base di R^2.
- I vettori
  $$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \ldots \qquad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$
  formano una base, detta *base canonica*, di R^n.

5. **Interpretazione geometrica delle operazioni sui punti di R^3**

Nello spazio R^3, consideriamo i punti

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix},$$

e la loro somma

$$P + Q = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

I punti $O, P, Q, P + Q$ sono ancora i vertici di un parallelogramma. Possiamo renderci conto di questo fatto nel modo seguente:

- il segmento orientato da P verso $P + Q$ e il segmento orientato da O verso Q rappresentano lo stesso spostamento di "3 unita' nella direzione dell'asse delle x, 4 unita' nella direzione dell'asse delle y, 5 unita' nella direzione dell'asse delle z,";
- il segmento orientato da Q verso $P + Q$ e il segmento orientato da O verso P rappresentano lo stesso spostamento di "1 unita' nella direzione dell'asse delle x, 2 unita' nella direzione dell'asse delle y, 3 unita' nella direzione dell'asse delle z".

I punti ottenuti moltiplicando il punto P per un numero reale α

$$\alpha\ P = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ 3\alpha \end{bmatrix}$$

descrivono, al variare del numero α in R, l'intera retta per O e P; per $\alpha \geq 0$ si hanno i punti della semiretta con origine O che contiene Q, per $\alpha \leq 0$ si hanno i punti della semiretta con origine O che non contiene Q.

Osserviamo infine che le combinazioni lineari

$$\alpha\ P + \beta\ Q, \qquad \alpha, \beta \in R,$$

di P e Q descrivono il piano OPQ. Infatti: i punti del tipo αP stanno sulla retta OP, i punti del tipo βQ stanno sulla retta OQ, e il punto $\alpha P + \beta Q$ somma di αP e βQ e' vertice del parallelogramma di lati $O(\alpha P)$ e $O(\beta Q)$, dunque giace nel piano OPQ. Si puo' poi provare che ogni punto del piano OPQ si puo' ottenere in questo modo.

6. **Definizione - spazio generato da un insieme** *Sia A un insieme formato da m vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m$ di R^n. L'insieme di tutte le combinazioni lineari*

   $$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m$$

   dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m$ viene detto spazio generato da A.

   Esempi - in R^3

   - Lo spazio generato da un qualsiasi punto P, diverso dall'origine O, e' una retta, precisamente la retta OP;
   - Lo spazio generato da due qualsiasi punti P, Q, non allineati con l'origine O, e' un piano, precisamente il piano OPQ;

7. **Basi di R^3**

   Nello spazio R^3, la base canonica e' data dai vettori

   $$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Ogni punto

   $$S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

   si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare

   $$S = s_1\ E_1 + s_2\ E_2 + s_3\ E_3$$

dei punti E_1, E_2, E_3, e i pesi di questa combinazione lineare sono le coordinate del punto rispetto al sistema di riferimento.

Possiamo costruire altre basi dello spazio R^3 nel modo seguente.

- scegliamo un punto P diverso dal punto origine O;
- scegliamo punto Q fuori dalla retta OP;
- scegliamo un punto R fuori dal piano OPQ.

Allora l'insieme

$\{P,\ Q,\ R\}$

e' una base di R^3.

Ci possiamo rendere conto di questo fatto nel modo seguente. Dato un qualsiasi punto S dello spazio, possiamo: tracciare la retta per S parallela alla retta OR ed intersecarla col piano OPQ, ottenendo cosi' un punto rappresentabile nella forma $\alpha P + \beta Q$; tracciare il piano per S parallelo al piano OPQ ed intersecarlo con la retta OR, ottenendo cosi' un punto rappresentabile nella forma γR. Per costruzione, i punti $O, \alpha P+\beta Q, \gamma R, S$ sono i vertici di un parallelogramma e si ha

$S = \alpha\ P + \beta\ Q + \gamma R,$

inoltre questa e' l'unica scrittura di S come combinazione lineare di P, Q ed R. I pesi α, β, γ in questa combinazione lineare si potranno a buon diritto chiamare coordinate di S rispetto al sistema di riferimento dato da O, P, Q, R.

In realta', la costruzione precedente fornisce tutte le basi dello spazio R^3; che dunque saranno tutte costituite da 3 punti.

8. Gli insiemi

   $\{P\}, \quad \{P,\ Q\}, \quad \{P,\ Q,\ R\},$

   sono esempi di insiemi linearmente indipendenti, nel senso della seguente

   Definizione - insieme linearmente dipendente/indipendente

   Sia A un insieme formato da m vettori

   $v_1, v_2, \ldots, v_m$

   di R^n. Se ciascuno dei vettori v_i non appartiene allo spazio generato dagli altri vettori

   $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_m,$

   allora diciamo che l'insieme A e' linearmente indipendente; altrimenti, diciamo che A e' linearmente dipendente.

   Nello spazio R^3 si verifica che non esistono insiemi linearmente indipendenti costituti da 4 o piu' punti.