Matematica II 24.03.06 **Appunti**

Sunto *Nella lezione si sono svolti i punti 4 e 6 della traccia della lezione precedente. In questi appunti, i primi 4 punti sono dedicati all'approfondimento della nozione di insieme base di R^n, e gli ultimi 4 punti sono dedicati all'approfondimento della nozione di insieme linearmente indipendente. La dimostrazione del teorema al punto 7 e' da considerarsi argomento opzionale.*

1. **Esercizio 1**

   Sono dati nello spazio R^3 i vettori

   $$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad t = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

   Per ciascuno dei seguenti insiemi, si dica se e' o meno una base di R^3.

   (a) $\{v,\ w\}$
   (b) $\{v,\ w,\ z\}$
   (c) $\{v,\ w,\ t\}$
   (d) $\{v,\ w,\ z,\ t\}$.

   Svolgimento

   (a) Dobbiamo dire se e' vero che ogni vettore u dello spazio R^3 si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare

   $\alpha v + \beta w = u$

   dei vettori v, w. Osserviamo che i vettori del tipo $\alpha v + \beta w$ stanno tutti sul piano Ovw; dunque i vettori u che stanno fori da questo piano non si possono scrivere come combinazione lineare di v, w, e l'insieme

   $\{v,\ w\}$

   non e' una base di R^3.

   (b) Dobbiamo dire se e' vero che ogni vettore

   $$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

   dello spazio R^3 si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare

   $\alpha v + \beta w + \gamma z = u$

dei vettori v, w, z. Sostituendo i vettori in questa uguaglianza, si ottiene

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix},$$

cioe'

$$\begin{bmatrix} \alpha + 4\beta + 7\gamma \\ 2\alpha + 5\beta + 8\gamma \\ 3\alpha + 6\beta + 9\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix},$$

cioe'

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta + 7\gamma &= u_1 \\ 2\alpha + 5\beta + 8\gamma &= u_2 \\ 3\alpha + 6\beta + 9\gamma &= u_3 \end{cases}.$$

Dobbiamo dunque chiederci se questo sistema lineare ammette soluzioni per ogni colonna dei termini noti. In altri termini, dobbiamo chiederci se la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

e' non singolare o meno. Per i risultati stabiliti nelle prime lezioni, noi sappiamo che cio' capita se e solo se il processo di triangolarizzazione trasforma questa matrice in una matrice triangolare non degenere. Ora, applicando questo processo si ha la matrice triangolare

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

che e' degenere. Ne concludiamo che l'insieme

$\{v,\ w,\ z\}$

non e' una base di R^3.

Osserviamo che tutto il problema si e' ridotto a dire se la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

che ha per colonne i vettori v, w, z e' non singolare o meno.

Prima di proseguire nello svolgimento dell'esercizio, stabiliamo questa osservazione nella sua forma generale.

2. **Combinazioni lineari e sistemi lineari**

Nello spazio vettoriale R^n consideriamo $m + 1$ vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad v_m = \begin{bmatrix} v_{1m} \\ v_{2m} \\ \vdots \\ v_{nm} \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix},$$

e ci poniamo il problema di rappresentare, se possibile, il vettore w come combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Indicati con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ i pesi incogniti della combinazione lineare, siamo cosi' condotti a considerare l'equazione vettoriale

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = w,$

cioe'

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + \alpha_m \begin{bmatrix} v_{1m} \\ v_{2m} \\ \vdots \\ v_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix},$$

che, sviluppando i calcoli, diventa

$$\begin{bmatrix} v_{11}\alpha_1 + v_{12}\alpha_2 + \cdots + v_{1m}\alpha_m \\ v_{21}\alpha_1 + v_{22}\alpha_2 + \cdots + v_{2m}\alpha_m \\ \vdots \\ v_{n1}\alpha_1 + v_{n2}\alpha_2 + \cdots + v_{nm}\alpha_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix},$$

che equivale al sistema lineare

$$\begin{cases} v_{11}\alpha_1 + & v_{12}\alpha_2 + & \cdots + & v_{1m}\alpha_m = & w_1 \\ v_{21}\alpha_1 + & v_{22}\alpha_2 + & \cdots + & v_{2m}\alpha_m = & w_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_{n1}\alpha_1 + & v_{n2}\alpha_2 + & \cdots + & v_{nm}\alpha_m = & w_n \end{cases}$$

di n equazioni nelle m incognite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Osserviamo che la matrice dei coefficienti di questo sistema lineare e' la matrice

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1m} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \ldots & v_{nm} \end{bmatrix}$$

che ha per colonne i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m$, mentre la colonna dei termini noti e' il vettore w.

Da queste considerazioni, e dai risultati stabiliti in precedenza sui sistemi lineari, segue direttamente il teorema del prossimo punto.

3. **Teorema - basi**

   Un insieme A di m vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad v_m = \begin{bmatrix} v_{1m} \\ v_{2m} \\ \vdots \\ v_{nm} \end{bmatrix}$$

dello spazio R^n e' una base di R^n se e solo se la matrice

$$[v_1\ v_2\ \ldots\ v_m] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1m} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \ldots & v_{nm} \end{bmatrix}$$

che ammette i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m$ come colonne e' non singolare.

Da altri punti di vista, per i risultati stabiliti sulle matrici non singolari, possiamo dire che l'insieme A e' una base di R^n se e solo se vale una delle due condizioni equivalenti

(a) *$m = n$ e la matrice $[v_1\ v_2\ \ldots v_n]$ viene trasformata dal processo di triangolarizzazione in una matrice triangolare non degenere*

$$\begin{bmatrix} v'_{11} & v'_{12} & \ldots & v'_{1m} \\ 0 & v'_{22} & \ldots & v'_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & v'_{mm} \end{bmatrix} \qquad v'_{11}, v'_{22}, \ldots, v'_{mm} \neq 0;$$

(b) *$m = n$, e la matrice $[v_1\ v_2\ \ldots v_n]$ ha determinante non nullo:* $det[v_1\ v_2\ \ldots v_n] \neq 0$.

Osserviamo che da questo teorema segue che

- *tutte le basi di R^n sono costituite da n vettori.*

4. **Esercizio 1 - continuazione**

Sono dati nello spazio R^3 i vettori

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad t = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Per ciascuno dei seguenti insiemi, si dica se e' o meno una base di R^3.

- $\{v,\ w,\ t\}$
- $\{v,\ w,\ z,\ t\}$.

Svolgimento

- Per il teorema del punto precedente, i vettori v, w, t formano una base di R^3 se e solo se la matrice
  $[v\ w\ t] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}$
  ottenuta affiancando i vettori colonna v, w, t e' non singolare, o, piu' operativamente, se e solo se questa matrice viene trasformata dal processo di triangolarizzazione in una matrice triangolare non degenere.

  Applicando questo processo si ottiene la matrice
  $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
  che e' non degenere. Dunque possiamo affermare che l'insieme

  $\{v,\ w,\ t\}$

  e' una base di R^3.

- L'insieme

  $\{v,\ w,\ z,\ t\}$

  e' formato da 4 vettori, tutte le basi di R^3 sono formate da 3 vettori, dunque l'insieme

  $\{v,\ w,\ z,\ t\}$

  non puo' essere una base di R^3.

5. Osserviamo che, se l'insieme

   $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

   e' una base dello spazio R^n, allora il vettore v_1 non si puo' scrivere come combinazione lineare

   $v_1 = \alpha_2\ v_2 + \cdots + \alpha_n\ v_n,$

   degli altri vettori $v_2, \ldots, v_n$, altrimenti v_1 si potrebbe scrivere in due modi come combimnazione lineare dei vettori di A :

   $v_1 = 1\ v_1 + 0\ v_2 + \cdots + 0\ v_n$

   $v_1 = 0\ v_1 + \alpha_2\ v_2 + \cdots + \alpha_n\ v_n,$

   contro il fatto che A e' una base di R^n. Un'analoga osservazione puo' essere ripetuta per v_2 ... e per v_n.

   Questa osservazione ci conduce alla seguente

   Definizione - insieme linearmente dipendente/indipendente

   Sia A un insieme formato da m vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m$ di R^n. Se ciascuno dei vettori v_i non appartiene allo spazio generato dagli altri vettori $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_m$, allora diciamo che l'insieme A e' *linearmente indipendente*; altrimenti, diciamo che A e' *linearmente dipendente*.

In base alla osservazione precedente, possiamo allora dire che

- *ciascun insieme base di R^n e' anche linearmente indipendente.*

6. **Esercizio 2**

Sono dati nello spazio R^3 i vettori

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad t = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Per ciascuno dei seguenti insiemi, si dica se e' linearmente indipendente o linearmente dipendente.

(a) $\{v, \ w\}$

(b) $\{v, \ w, \ z\}$

(c) $\{v, \ w, \ t\}$

(d) $\{v, \ w, \ z, \ t\}$.

Svolgimento

(a) Dobbiamo chiederci: v appartiene allo spazio generato da w? w appartiene allo spazio generato da v?

La prima domanda significa: c'e' uno scalare α tale che v si possa scrivere come

$\alpha w = v \quad ?$

Sostituendo, si ha

$$\alpha \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix};$$

confrontando le prime componenti, si ottiene $\alpha = \frac{1}{4}$, mentre confrontando le seconde componenti, si ottiene $\alpha = \frac{2}{5}$, dunque non c'e' nessuno scalare α tale che v si possa scrivere come $\alpha w = v \quad$, cioe' v non appartiene allo spazio generato da w.

In modo analogo si verifica che w non appartiene allo spazio generato da v.

Dunque l'insieme

$\{v, \ w\}$

e' linearmente indipendente.

(b) Dobbiamo chiederci: v appartiene allo spazio generato da w e z? w appartiene allo spazio generato da v e z? z appartiene allo spazio generato da v e w?

La prima domanda significa: ci sono due scalari α e β tali che v si possa scrivere come

$\alpha w + \beta z = v \quad ?$

Cio' equivale a chiedersi se il sistema lineare

$$\begin{cases} 4\alpha + 7\beta &= 1 \\ 5\alpha + 8\beta &= 2 \\ 6\alpha + 9\beta &= 3 \end{cases}$$

nelle incognite α, β ha soluzioni. Si puo' vedere che questo sistema ha esattamente una soluzione:

$\alpha = 2$

$\beta = -1.$

Dunque v si puo' scrivere come

$2w - z = v,$

cioe' v appartiene allo spazio generato da w e z.

Concludiamo che l'insieme

$\{v,\ w,\ z\}$

e' linearmente dipendente.

(c) Dobbiamo chiederci: v appartiene allo spazio generato da w e t? w appartiene allo spazio generato da v e t? t appartiene allo spazio generato da v e w?

Chiedersi se v appartiene allo spazio generato da w e t equivale a chiedersi se il sistema lineare avente matrice completa

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 7 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \\ 6 & 10 & 3 \end{array}\right]$$

ha soluzioni. Si verifica che questo sistema non ha soluzioni.

Chiedersi se w appartiene allo spazio generato da v e t equivale a chiedersi se il sistema lineare avente matrice completa

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & 4 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 10 & 6 \end{array}\right]$$

ha soluzioni. Si verifica che questo sistema non ha soluzioni.

Chiedersi se t appartiene allo spazio generato da w e w equivale a chiedersi se il sistema lineare avente matrice completa

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{array}\right]$$

ha soluzioni. Si verifica che questo sistema non ha soluzioni.

Possiamo allora concludere che l'insieme

$\{v,\ w, t\}$
e' linearmente indipendente.

Osserviamo che provare che un insieme e' linearmente indipendente risulta piuttosto laborioso. Sospendiamo qui lo svolgimento dell'esercizio, per stabilire un teorema che risponde a questo problema. Nel teorema avra' un ruolo essenziale la seguente nozione.

Una *relazione lineare* fra i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m$ dello spazio vettoriale R^n e' un'ugiaglianza del tipo

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m = 0,$

dove 0 e' il vettore nullo di R^n, cioe' il vettore avente tutte le componenti uguali al numero 0. Questa relazione lineare si dice *banale* se tutti i suoi coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sono nulli.

Esempio

Consideriamo tre vettori

$a = [a_i]_{i=1,\ldots,n}, \quad b = [b_i]_{i=1,\ldots,n}, \quad c = [c_i]_{i=1,\ldots,n}$

in R^n tali che ciascuna componente di b sia la media fra le corrispondenti componenti di a e c :

$\frac{a_i + c_i}{2} = b_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$

Possiamo esprimere queste uguaglianze fra le componenti con l'unica uguaglianza

$\frac{1}{2}\ a + \frac{1}{2}\ c = b.$

A sua volta, questa uguaglinza si puo' riscrivere come la relazione lineare non banale

$\frac{1}{2} a - b + \frac{1}{2} c = 0,$

dove 0 e' il vettore nullo di R^n.

7. **Teorema**

Sia A un insieme formato da m vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m$ di R^n.

(a) L'insieme A e' linearmente dipendente se e solo se i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m$ soddisfano una relazione lineare

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m = 0$

non banale, nella quale qualche coefficiente λ_i e' diverso da 0.

(b) L'insieme A e' linearmente indipendente se e solo se l'unica relazione lineare

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m = 0$

soddisfatta dai vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m$ e' la relazione banale, nella quale tutti i coefficienti λ_i sono 0.

Dimostrazione Basta provare la parte (a).

- Supponiamo che i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m$ siano linearmente dipendenti. Cio' significa che uno di essi, per semplicita' supponiamo v_1, appartiene allo spazio generato dagli altri vettori $v_2, \ldots, v_m$, cioe' v_1 si puo' scrivere come
  $\alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m = v_1.$
  Allora da questa uguaglianza possiamo ricavare la relazione lineare
  $v_1 - \alpha_2 v_2 - \cdots - \alpha_m v_m = 0,$
  che e' non banale poiche' il peso di v_1 e' diverso da 0.
- Supponiamo che i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m$ soddisfino una relazione lineare non banale
  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m = 0,$
  nella quale un peso, per semplicita' supponiamo α_m, e' diverso da 0. Possiamo allora ricavare da questa relazione una scrittura
  $v_m = -\frac{\alpha_1}{\alpha_m} v_1 - \cdots - \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m} v_{m-1}$
  del vettore v_m come combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}$. Cio' significa che l'insieme dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m$ e' linearmente dipendente.

Possiamo allora dire che studiare l'indipendenza lineare di m vettori

$v_1, v_2, \ldots, v_m$

in R^n equivale a studiare le relazioni lineari

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m = 0$

fra questi vettori, che a sua volta equivale a studiare il sistema lineare di n equazioni nelle m incognite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ avente come matrice dei coefficienti la matrice

$[v_1 \ v_2 \ \ldots \ v_m]$

e come colonna dei termini noti il vettore nullo 0 di R^n. Un sistema lineare che ha tutti i termini noti nulli viene detto sistema lineare *omogeneo.*

Da queste considerazioni, e da un raffinamento dei risultati stabiliti in precedenza sui sistemi lineari, si puo' dedurre il teorema del prossimo punto.

8. **Teorema - insiemi linearmente indipendenti**

Sia A un insieme di m vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad v_m = \begin{bmatrix} v_{1m} \\ v_{2m} \\ \vdots \\ v_{nm} \end{bmatrix}$$

dello spazio R^n.

L'insieme A e' linearmente indipendente se e solo se

- *il sistema lineare omogeneo*
  $$\begin{cases} v_{11}\alpha_1 + & v_{12}\alpha_2 + & \cdots + & v_{1m}\alpha_m = & 0 \\ v_{21}\alpha_1 + & v_{22}\alpha_2 + & \cdots + & v_{2m}\alpha_m = & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \\ v_{n1}\alpha_1 + & v_{n2}\alpha_2 + & \cdots + & v_{nm}\alpha_m = & 0 \end{cases}$$
  avente la matrice
  $$[v_1\ v_2\ \ldots\ v_m] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1m} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \ldots & v_{nm} \end{bmatrix}$$
  come matrice dei coefficienti ha solo la soluzione banale $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$.

Da un altro punto di vista, piu' operativo, l'insieme A e' linearmente indipendente se e solo se

- *$m \leq n$, e la matrice $[v_1\ v_2\ \ldots\ v_m]$ viene trasformata dal processo di triangolarizzazione in una matrice triangolare non degenere*
  $$\begin{bmatrix} v'_{11} & v'_{12} & \ldots & v'_{1m} \\ 0 & v'_{22} & \ldots & v'_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & v'_{mm} \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} \qquad v'_{11}, v'_{22}, \ldots, v'_{mm} \neq 0.$$

Dai teoremi di caratterizzazione degli insiemi base e degli insiemi linearmente indipendenti segue il

Teorema *Sia A un insieme formato da n vettori di R^n. Se A e' linearmente indipendente, allora A e' una base per R^n.*

9. Riprendiamo l'esercizio 2, svolgendolo da nuovo.

Esercizio 2 - continuazione

Sono dati nello spazio R^3 i vettori

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad t = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Per ciascuno dei seguenti insiemi, si dica se e' linearmente indipendente o linearmente dipendente.

(a) $\{v,\ w\}$
(b) $\{v,\ w,\ z\}$
(c) $\{v,\ w,\ t\}$
(d) $\{v,\ w,\ z,\ t\}$.

Svolgimento

(a) Basta applicare alla matrice
$$[v\ w] = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$
il processo di triangolarizzazione. Si ottiene la matrice
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
che e' triangolare non degenere. Dunque possiamo concludere che l'insieme
$\{v,\ w\}$
e' linearmente indipendente.

(b) Basta applicare alla matrice
$$[v\ w\ z] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$
il processo di triangolarizzazione. Si ottiene la matrice
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
che e' triangolare degenere. Dunque possiamo concludere che l'insieme
$\{v,\ w,\ z\}$
e' linearmente dipendente.

(c) Basta applicare alla matrice
$$[v\ w\ t] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$
il processo di triangolarizzazione. Si ottiene la matrice
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che e' triangolare non degenere. Dunque possiamo concludere che l'insieme

$\{v,\ w,\ t\}$

e' linearmente indipendente.

(d) L'insieme

$\{v,\ w,\ z, t\}$

e' costituito da $4 > 3$ vettori in R^3, dunque e' linearmente dipendente.