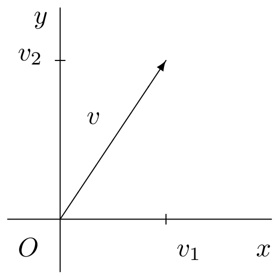
Matematica II 21.04.06

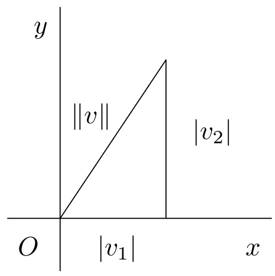
Sunto *Dopo avere ricavato la formula per la lunghezza di un vettore nel piano e nello spazio, definiamo la lunghezza, o norma, di un vettore in R^n, per ogni $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$, riconduciamo questa nozione alla nozione di prodotto scalare di due vettori di R^n, ed elenchiamo e verifichiamo le proprieta' salienti del prodotto scalare e della norma. Infine, dopo avere descritto le condizioni di ortogonalita' di due vettori nel piano e nello spazio, definiamo la condizione di ortogonalita' per due vettori di R^n, e dimostriamo il teorema di Pitagora in R^n.*

1. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, possiamo interpretare un vettore
$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$
di R^2 come il segmento orientato con primo estremo il punto origine O e secondo estremo il punto di coordinate (v_1, v_2) :



Ora, un punto che partendo da O si sposta di v_1 unita' nella direzione dell'asse x e poi si sposta di v_2 unita' nella direzione dell'asse y descrive i due cateti di un triangolo rettangolo che ammette v come ipotenusa. Dunque, per il Teorema di Pitagora, si ha che la lunghezza $\|v\|$ del vettore
$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$
e' data, nell'unita' di misura scelta, da

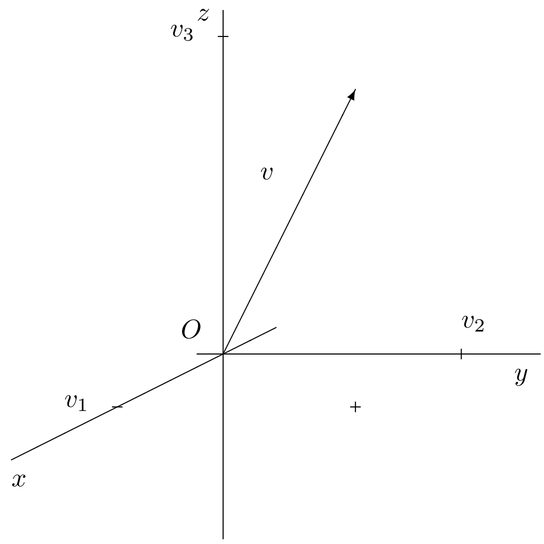
$$\|v\| = \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$



2. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, possiamo interpretare un vettore

   $$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

   di R^3 come il segmento orientato con primo estremo il punto origine O e secondo estremo il punto di coordinate (v_1, v_2, v_3) :

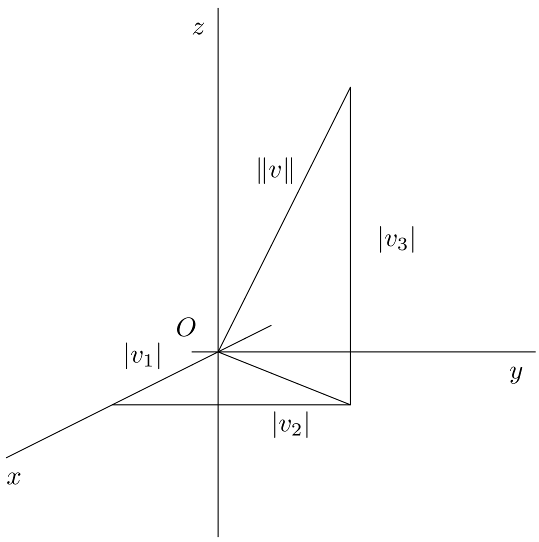
   

   Ora, un punto che partendo da O si sposta nel punto di coordinate $(v_1, v_2, 0)$, poi si sposta di v_3 unita' nella direzione dell'asse z, descrive i due cateti di un triangolo rettangolo che ammette v come ipotenusa. Dunque, per il Teorema di Pitagora, si ha che la lunghezza $\|v\|$ del vettore

   $$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

e' data, nell'unita' di misura scelta, da

$$\|v\| = \sqrt{\sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2}^2 + |v_3|^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$



3. Siamo cosi' condotti a *definire* la lunghezza $\|v\|$ di un vettore
$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$
di R^n ponendo
$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}.$$
Solitamente, specialmente nel caso $n > 3$, al termine *lunghezza* si preferisce il termine *norma.*

Si osservi che ciascuno dei vettori
$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \ldots \qquad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$
della base canonica di R^n ha norma 1 :
$\|e_i\| = \sqrt{0^2 + \cdots + 0^2 + 1^2 + 0^2 + \cdots + 0^2} = 1.$

Un vettore di norma 1 si dice *versore.*

Nel seguito mostreremo come le principali proprieta' della nozione di lunghezza continuano a valere anche nel caso $n > 3$, nel quale non vi e' diretta interpretazione geometrica. Cosi' come la definizione di lunghezza per n qualsiasi e' puramente algebrica, anche gli argomenti che useremo per mostrarne le proprieta' saranno puramente algebrici.

4. Per ogni due vettori $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$ di R^n, l'espressione

$$v_1w_1 + v_2w_2 + \cdots + v_nw_n = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

viene detta *podotto scalare (canonico)* dei vettori v e w, e viene indicata con $\langle v, w \rangle$; sinteticamente, si ha

$$\langle v, w \rangle = v^T w.$$

Osserviamo che per $v = w$ si ha
$\langle v, v \rangle = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2$;
possiamo allora riscrivere la norma di un vettore v di R^n nella forma

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

5. Proprieta' del prodotto scalare: per ogni v, v', w, w' vettori di R^n ed ogni a, b scalari in R, si ha

   - $$\begin{aligned} \langle v + v', w \rangle &= \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle & \qquad \langle v, w + w' \rangle &= \langle v, w \rangle + \langle v, w' \rangle \\ \langle av, w \rangle &= a \ \langle v, w \rangle & \qquad \langle v, bw \rangle &= b \ \langle v, w \rangle \end{aligned}$$
   - $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$
   - $\langle v, v \rangle \geq 0$
   - $\langle v, v \rangle = 0$ *se e solo se* $v = 0$.

In breve, si dice che il prodotto scalare canonico e' una *forma bilineare simmetrica definita positiva.*

Di seguito riportiamo la verifica di alcune delle proprieta'.

Verifichiamo che, per ogni tre vettori v, v', w in R^n, si ha

$\langle v + v', w\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v', w\rangle$.

Posto

$v = [v_i]_{i=1,\dots,n}, \quad v' = [v'_i]_{i=1,\dots,n}, \quad w = [w_i]_{i=1,\dots,n}$,

il primo membro risulta

$\sum_{i=1}^n (v + v')_i w_i = \sum_{i=1}^n (v_i + v'_i) w_i$,

il secondo membro risulta

$\sum_{i=1}^n v_i w_i + \sum_{i=1}^n v'_i w_i$,

e si ha

$\sum_{i=1}^n (v_i + v'_i) w_i = \sum_{i=1}^n v_i w_i + \sum_{i=1}^n v'_i w_i$,

per le proprieta' delle sommatorie.

Verifichiamo che, per ogni vettore v di R^n, si ha

$\langle v, v\rangle \geq 0$

$\langle v, v\rangle = 0 \quad$ *se e solo se* $\quad v = 0$.

Infatti, posto $v = [v_i]_{i=1,\dots,n}$, si ha

$\langle v, v\rangle = \sum_{i=1}^n v_i^2$;

abbiamo tutti termini maggiori o uguali a zero, poiche' quadrati di numeri reali, dunque maggiore o uguale a zero sara' anche la loro somma, e una somma pari a zero si otterra' se e solo solo se tutti i termini v_i^2 sono nulli, cioe' se e solo se tutte le componenti v_i di v sono nulle.

6. Come applicazione di alcune delle proprieta' del prodotto scalare, svolgiamo un conto su due generici vettori v, w in R^n.

   - $\|v + w\|^2 =$
     $= \langle v + w, v + w\rangle$
     $= \langle v, v + w\rangle + \langle w, v + w\rangle$
     $= \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle$
     $= \|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2$.

7. Una proprieta' che coinvolge sia il prodotto scalare che la norma e' la *disuguaglianza di Cauchy-Schwartz:* per ogni v, w vettori di R^n, si ha

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \; \|w\|.$$

   Verifichiamo questa disuguaglianza nel caso molto particolare in cui $v = e_1$, il primo vettore della base canonica di R^n, mentre $w = [w_i]_{i=1,\dots,n}$, un generico vettore di R^n.

In questo caso: il primo membro della disuguaglianza e'

$|\langle e_1, w\rangle| = |\ 1w_1 + 0w_2 + \cdots + 0w_n| = |w_1|$,

il secondo membro e'

$\|e_1\|\ \|w\| = 1\ \|w\| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + \cdots + w_n^2}$,

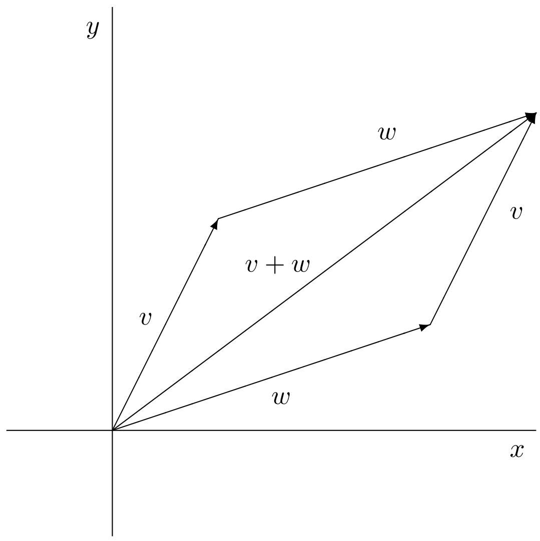
e si ha

$|w_1| = \sqrt{w_1^2} \leq \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + \cdots + w_n^2}$.

8. Proprieta' della norma: per ogni v, w vettori di R^n ed ogni a scalare in R, si ha

   - $\|v\| \geq 0$;
   - $\|v\| = 0$ *se e solo se* $v = 0$;
   - $\|av\| = |a|\ \|v\|$;
   - $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

   Quest'ultima proprieta' si dice *disuguaglianza triangolare*, poiche' nei casi $n = 2, 3$ afferma che "in un triangolo, la lunghezza di un lato non supera la somma delle lunghezze degli altri due lati".

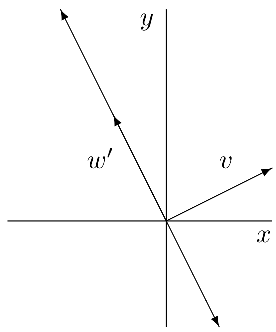


Verifichiamo ora le proprieta' della norma sopra elencate.

- $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} \geq 0$ per la definizione di radice quadrata (per $r \geq 0$, $\sqrt{r}$ indica la soluzione non negativa dell'equazione $x^2 = r$);

- $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = 0$ se e solo se $\langle v, v\rangle = 0$ se e solo se $v = 0$, per l'ultima proprieta' del prodotto scalare;
- $\|av\| = \sqrt{\langle av, av\rangle} = \sqrt{a^2\langle v, v\rangle} = |a| \sqrt{\langle v, v\rangle} = |a| \|v\|$.
- Mostriamo infine che per ogni v, w vettori in R^n, si ha
  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.
  Poiche' entrambi i membri di questa disuguaglianza sono non negativi, essa e' equivalente alla disuguaglianza
  $\|v + w\|^2 \leq (\|v\| + \|w\|)^2$,
  ottenua elevando al quadrato entrambi i membri. Ora,
  $\|v + w\|^2 =$
  $= \|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2$
  $\leq \|v\|^2 + 2|\langle v, w\rangle| + \|w\|^2$
  $\leq \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2$
  $= (\|v\| + \|w\|)^2$;
  nel penultimo passaggio abbiamo utilizzato la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz.

9. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, consideriamo il vettore
   $$v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
   e cerchiamo di determinare qualche vettore ad esso ortogonale; possiamo prendere
   $$w' = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix};$$
   in realta', i vettori ortogonali al vettore v sono tutti e soli quelli del tipo
   $$w = \begin{bmatrix} -a \\ 2a \end{bmatrix},$$
   dove a e' un numero reale qualsiasi.



Si puo' osservare che il prodotto scalare di ciscuno di questi vettori w con v e' nullo:

$\langle v, w \rangle = 2 \cdot (-a) + 1 \cdot (2a) = 0.$

10. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, si prova che la condizione di ortogonalita' di due vettori

    $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$

    e' data da

    $v \perp w \quad \textit{se e solo se} \quad v_1 w_1 + v_2 w_2 = 0.$

    Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, si prova che la condizione di ortogonalita' di due vettori

    $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$

    e' data da

    $v \perp w \quad \textit{se e solo se} \quad v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0.$

    Siamo cosi' condotti a *definire* l'ortogonalita' di due vettori v e w di R^n ponendo

    $$v \perp w \quad \textit{se e solo se} \quad \langle v, w \rangle = 0.$$

    La proprieta' di simmetria del prodotto scalare assicura la proprieta' di simmetria dell'ortogonalita':

    $v \perp w \qquad \textit{se e solo se} \qquad w \perp v.$

    Si osservi che i vettori

    $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \dots \qquad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$

    della base canonica di R^n sono a due a due ortogonali:

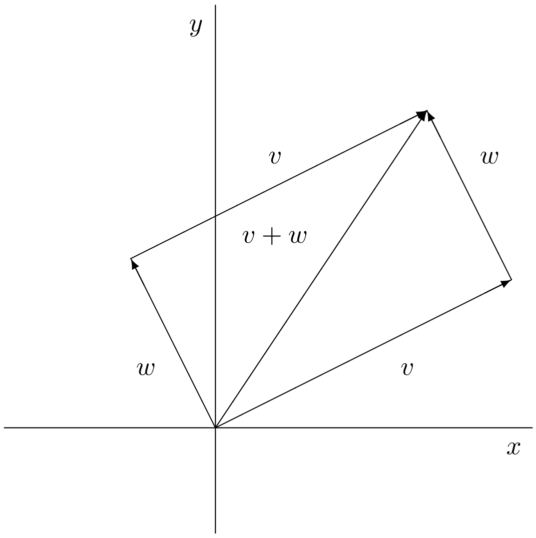
    $e_i \perp e_j, \qquad \textit{per ogni } i \neq j.$

    Infatti, in generale, il prodotto scalare $\langle e_i, w \rangle$ fra l'$i-$mo vettore della base canonica e un qualsiasi vettore w di R^n e' la $i-$ma componente del vettore w; dunque il prodotto scalare $\langle e_i, e_j \rangle$ e' la $i-$ma componente del vettore e_j, la quale, per $j \neq i$, e' nulla.

11. Nello spazio vettoriale R^2, il teorema di Pitagora puo' essere espresso nella forma: se due vettori v e w sono fra loro ortogonali, allora il quadrato della

lunghezza del vettore somma $v+w$ e' uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze dei vettori addendi v, w :

$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$



Il teorema di Pitagora continua a velere nello spazio vettoriale R^n : se due vettori v e w di R^n sono fra loro ortogonali, allora

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

Infatti, sotto la condizione di ortogonalita' fra v e w, cioe' sotto la condizione

$\langle v, w\rangle = 0,$

si ha

$\|v + w\|^2 =$

$= \langle v + w, v + w\rangle$

$= \langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle$

$= \langle v, v\rangle + \langle w, w\rangle$

$= \|v\|^2 + \|w\|^2.$

Per esercizio, si provi che nello spazio vettoriale R^n, se tre vettori u, v, w sono a due a due ortogonali, allora

$$\|u + v + w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2.$$