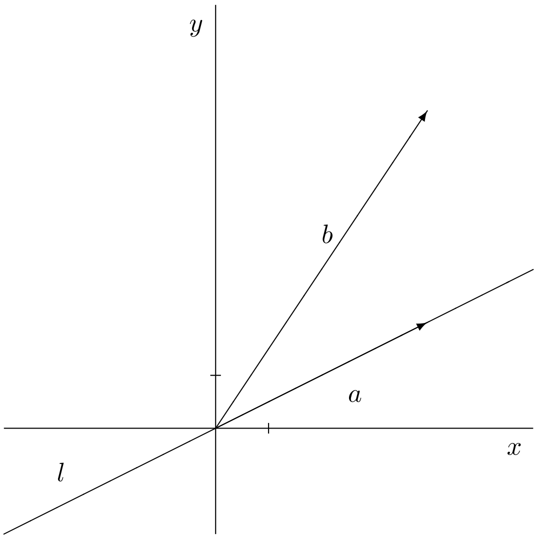
Matematica II 28.04.06

1. Nel piano, munito di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, consideriamo un vettore $a \neq 0$, la retta

   $l = \{ra;\ r \in R\}$

   da esso generata, ed un vettore b.

   Esempio: $a = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

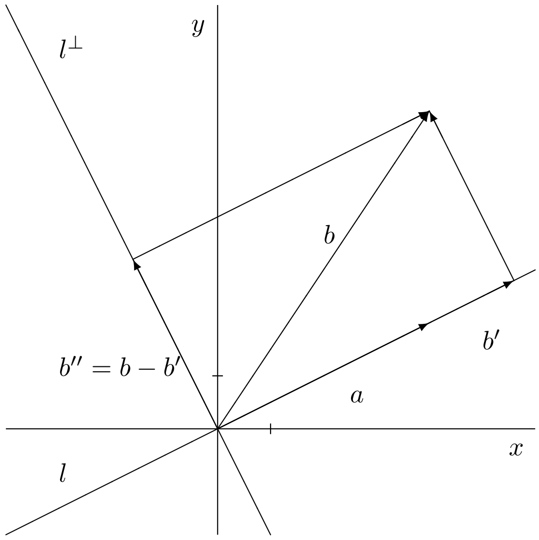
   

   Possiamo allora scrivere il vettore b in uno ed un solo modo come somma

   $b = b' + b''$

   di un vettore b' sulla retta l e di un vettore b'' sulla retta $l^{\perp}$ ortogonale ad l passante per O.

   Il vettore b' si dice *proiezione ortogonale* del vettore b sul vettore a.



In altri termini, poiche'

$b'' = b - b'$,

si puo' dire che esiste uno ed un solo vettore b' tale che

$b'//a, \qquad b - b' \perp a$,

e che b' e' la proiezione ortogonale di b sul vettore a.

2. Il fatto geometrico appena descritto vale in realta' nello spazio R^n :

Proposizione *Nello spazio R^n consideriamo un vettore $a \neq 0$. Per ogni vettore b di R^n esiste uno ed un solo vettore b' tale che*

$$b'//a, \quad b - b' \perp a,$$

e si ha

$$b' = a \, \frac{\langle a, b\rangle}{\langle a, a\rangle}.$$

Il vettore b' si dice *proiezione ortogonale* del vettore b sul vettore a, e si indica col simbolo

$$pr_a \ b;$$

lo scalare

$$\frac{\langle a, b\rangle}{\langle a, a\rangle}$$

viene detto *coefficiente di Fourier* del vettore b rispetto al vettore a.

Dim. La condizione $b'//a$ significa che b' si puo' scrivere come

$b' = rb, \quad con\ r \in R;$

la condizione $b - b' \perp a$ significa che

$\langle a, b - b' \rangle = 0.$

Sostituendo in questa uguaglinza $b' = ra$ otteniamo l'uguaglianza

$\langle a, b - ra \rangle = 0,$

che, per le proprieta' del prodotto scalare, puo' essere riscritta nella forma

$\langle a, b \rangle - r\ \langle a, a \rangle = 0.$

Questa uguaglianza e' un'equazione lineare nell'incognita r, con coefficiente $\langle a, a \rangle \neq 0$, in quanto $a \neq 0$; si ha cosi' ha una ed una sola soluzione:

$r = \frac{\langle a,b \rangle}{\langle a,a \rangle}.$

Dunque esiste uno ed un solo vettore b' con le proprieta' richieste, e si ha

$b' = a\frac{\langle a,b \rangle}{\langle a,a \rangle}.$

Esempio: $a = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

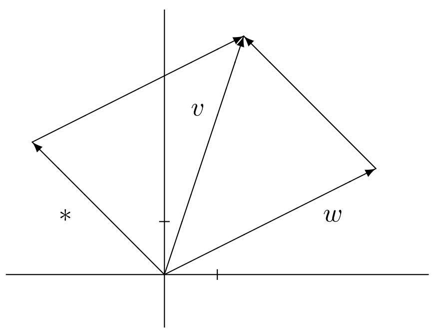
$$pr_a\ b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{\langle \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \rangle}{\langle \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \rangle} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{4 \cdot 4 + 2 \cdot 6}{4 \cdot 4 + 2 \cdot 2} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{28}{20} = \begin{bmatrix} 5.6 \\ 2.8 \end{bmatrix}$$

3. Nel piano, munito di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, dati due vettori v, w, si ha che il segmento orientato che va dal punto finale di w al punto finale di v ha la stessa direzione, verso e lunghezza del vettore $*$ tale che

   $* + w = v,$

   cioe' del vettore

   $* = v - w.$



Ora, possiamo definire la *distanza*

$d(v, w)$

fra i due vettori v e w come la distanza fra i loro punti finali, o, che e' lo stesso, la lunghezza del segmento che collega i punti finali di w e v.

Per quanto sopra osservato, questa lunghezza coincide con la lunghezza del vettore $v - w$, dunque si ha

$d(v, w) = \|v - w\| = \sqrt{(v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2}$,

dove abbiamo posto $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$.

4. Nello spazio R^n, definiamo la distanza

   $d(v, w)$

   fra due vettori

   $v = [v_i]_{i=1,\ldots,n}, \qquad w = [w_i]_{i=1,\ldots,n}$

   come la norma del vettore loro differenza

   $v - w = [v_i - w_i]_{i=1,\ldots,n}$,

   poniamo cie'

   $$d(v, w) = \|v - w\| = \sqrt{(v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 + \cdots (v_n - w_n)^2}.$$

5. Proprieta' della distanza: per ogni u, v, w, z vettori di R^n ed ogni a scalare in R, si ha

   - $d(v, w) \geq 0$;
   - $d(v, w) = 0 \quad$ *se e solo se* $\quad v = w$;
   - $d(v, w) = d(w, v)$;
   - $d(av, aw) = |a| \ d(v, w)$;
   - $d(v + u, w + u) = d(v, w)$;
   - $d(v, w) \leq d(v, z) + d(z, w)$.

   Quest'ultima proprieta' si dice *disuguaglianza triangolare*, poiche' nei casi $n = 2, 3$ afferma che "in un triangolo, la lunghezza di un lato non supera la somma delle lunghezze degli altri due lati".

   Tutte queste proprieta' derivano direttamente dalla proprieta' della norma:

   - $d(v, w) = \|v - w\| \geq 0$;
   - $d(v, w) = 0 \ \Leftrightarrow \ \|v - w\| = 0 \ \Leftrightarrow \ v - w = 0 \ \Leftrightarrow \ v = w$;

- $d(v, w) = d(w, v)$ significa
  $\|v - w\| = \|w - v\|$,
  e in effetti si ha
  $\|v - w\| = \| - 1 \cdot (w - v)\| = | - 1| \cdot \|w - v\| = \|w - v\|$;
- $d(av, aw) = \|av - aw\| = \|a(v - w)\| = |a| \cdot \|v - w\| = |a|\ d(v, w)$;
- $d(v + u, w + u) = \|v + u - (w + u)\| = \|v - w\| = d(v, w)$;
- $d(v, w) \leq d(v, z) + d(z, w)$ significa
  $\|v - w\| \leq \|v - z\| + \|z - w\|$,
  e questa disuguaglianza segue dalla disuguaglianza triangolare per la norma, in quanto $v - w = v - z + z - w$.

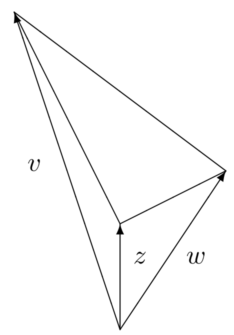
6. Dal teorema di Pitagora per la norma segue il teorema di Pitagora per la distanza, nella forma seguente.

   Teorema *Se v, w, z sono vettori di R^n, con*

   $v - z \perp z - w$,

   allora

   $d(v, w)^2 = d(v, z)^2 + d(z, w)^2$.



7. Nel piano, munito di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, consideriamo un vettore $a \neq 0$, la linea

   $l = \{ra;\ r \in R\}$

   generata da a, un vettore b, e il vettore

   $b' \in l$

   proiezione ortogonale di b su a, definito dalla condizione

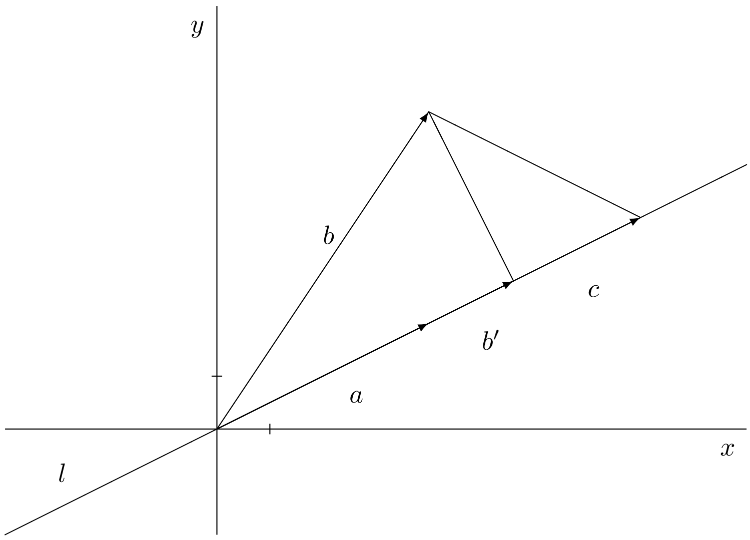
$b - b' \perp a$.

Osserviamo che, il vettore b' e' il vettore di l piu' vicino a b, nel senso che per ogni vettore

$c \in l$

si ha

$d(b, c) \geq d(b, b')$.



Dunque la distanza $d(b, b')$ di b dalla sua proiezione ortogonale su l puo' essere a buon diritto presa come la distanza $d(b, l)$ del vettore b dalla linea l.

8. Le considerazioni del punto precedente si estendono nel modo seguente.

   Nello spazio R^n consideriamo un vettore $a \neq 0$, la linea

   $l = \{ra;\ r \in R\}$

   generata da a, un vettore b, e il vettore

   $b' \in l$

   proiezione ortogonale di b su a, definito dalla condizione

   $b - b' \perp a$.

   Osserviamo che, per ogni vettore

   $c \in l$

   si ha

$b - b' \perp b' - c.$

Infatti, posto $b' = \beta' a$ e $c = \gamma a$, si ha

$\langle b - b', b' - c \rangle =$

$= \langle b - b', \beta' a - \gamma a \rangle$

$= \langle b - b', (\beta' - \gamma) a \rangle$

$= (\beta' - \gamma) \langle b - b', a \rangle$

$= (\beta' - \gamma)\ 0 = 0.$

Dunque, per il teorema di Pitagora, si ha

$d(b, c)^2 = d(b, b')^2 + d(b', c)^2,$

da cui segue

$d(b, c)^2 \geq d(b, b')^2,$

cioe'

$d(b, c) \geq d(b, b').$

In altri termini, si ha

$$d(b, b') = min_{c \in l}\ d(b, c).$$

Possiamo dunque prendere $d(b, b')$ come *distanza* $d(b, l)$ *del vettore* b *dalla linea* l :

$$d(b, l) = d(b, b').$$

9. Nel piano, munito di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, due vettori, non nulli, fra loro ortogonali formano sempre una base del piano.

   Nello spazio, munito di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, due vettori, non nulli, fra loro ortogonali sono sempre linearmente indipendenti, e tre vettori, non nulli, fra loro ortogonali sono sempre una base dello spazio.

   Il fatto geometrico appena descritto vale in realta' nello spazio R^n :

   Proposizione. *Nello spazio* R^n, *sia*

   $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$

   un insieme di m *vettori* $v_1, v_2, \ldots, v_m$ *non nulli, a due a due orogonali. Allora*

   (a) l'insieme A *e' linearmente indipendente;*

   (b) se $m = n$, *l'insieme* A *e' una base di* R^n.

   Dim.

(a) Proviamo che l'unica relazione lineare
$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_i v_i + \cdots + \alpha_n v_n = 0$
che sussiste fra i vettori di A e' quella in cui ogni coefficiente e' nullo:
$\alpha_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, m.$
Infatti, prendendo il prodotto scalare di entrambi i membri con il vettore v_i si ha l'uguaglianza:
$\langle \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_i v_i + \cdots + \alpha_m v_m, v_i \rangle = \langle 0, v_i \rangle,$
che, per le proprieta' del prodotto scalare, si puo' riscrivere come
$\alpha_1 \langle v_1, v_i \rangle + \cdots + \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle + \cdots + \alpha_m \langle v_m, v_i \rangle = 0;$
ora, il vettore v_i e' ortogonale a tutti gli altri vettori, cosi'
$\langle v_1, v_i \rangle = \ldots = \langle v_{i-1}, v_i \rangle = \langle v_{i+1}, v_i \rangle = \ldots = \langle v_m, v_i \rangle = 0,$
e l'uguaglianza diviene
$\alpha_i \langle v_i, v_i \rangle = 0;$
ora, $v_i \neq 0$, cosi' $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$, dunque deve essere
$\alpha_i = 0.$

(b) Segue dal fatto che un insieme linearmente indipendente di n vettori di R^n e' sempre una base di R^n.

Una base di R^n formata da vettori a due a due ortogonali si dice, in breve, *base ortogonale* di R^n; una base di R^n formata da versori a due a due ortogonali si dice, in breve, *base ortonormale* di R^n.

Proposizione. *Sia* $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *una base di* R^n, *sia* v *un vettore di* R^n, *e sia*

$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$

l'unica scrittura di v *come combinazione lineare dei vettori di* A.

Se la base A *e' ortogonale, allora* α_i *e' il coefficiente di Fourier di* v *rispetto a* v_i :

$$\alpha_i = \frac{\langle v_i, v \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle};$$

in particolare, se la base A *e' ortonormale, allora*

$$\alpha_i = \langle v_i, v \rangle.$$

Dim.

Infatti, prendendo il prodotto scalare di entrambi i membri con il vettore v_i si ha l'uguaglianza:

$\langle v_i, v \rangle = \langle v_i, \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_i v_i + \cdots + \alpha_n v_n \rangle,$

che, per le proprieta' del prodotto scalare, si puo' riscrivere come

$\langle v_i, v \rangle = \alpha_1 \langle v_i, v_1 \rangle + \cdots + \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle + \cdots + \alpha_n \langle v_i, v_n \rangle$;

ora, il vettore v_i e' ortogonale a tutti gli altri vettori, cosi'

$\langle v_i, v_1 \rangle = \ldots = \langle v_i, v_{i-1} \rangle = \langle v_i, v_{i+1} \rangle = \ldots = \langle v_i, v_n \rangle = 0$,

e l'uguaglianza diviene

$\langle v_i, v \rangle = \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle$;

ora, $v_i \neq 0$, cosi' $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$, dunque deve essere

$\alpha_i = \frac{\langle v_i, v \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$.