Matematica II 19.05.06

1. Consideriamo una matrice quadrata di ordine due

   $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix};$

   per ogni vettore

   $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

   in R^2, possiamo moltiplicare la matrice A per x, ottenendo cosi' il vettore

   $Ax = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$

   in R^2.

   La funzione

   $f : R^2 \to R^2,$

   $f(x) = Ax, \qquad x \in R^2,$

   e' una funzione lineare (cfr. IV lezione).

   Osserviamo che questa funzione si comporta bene rispetto alle operazioni di addizione fra vettori e di moltiplicazione di vettori per scalari, nel senso che

   $f(u + v) = f(u) + f(v),$

   $f(\alpha\ u) = \alpha\ f(u),$

   per ogni u, v in R^2 ed ogni α in R.

   Queste proprieta', per come e' definita la funzione f, significano

   $A(u + v) = Au + Av,$

   $A(\alpha\ u) = \alpha\ Au,$

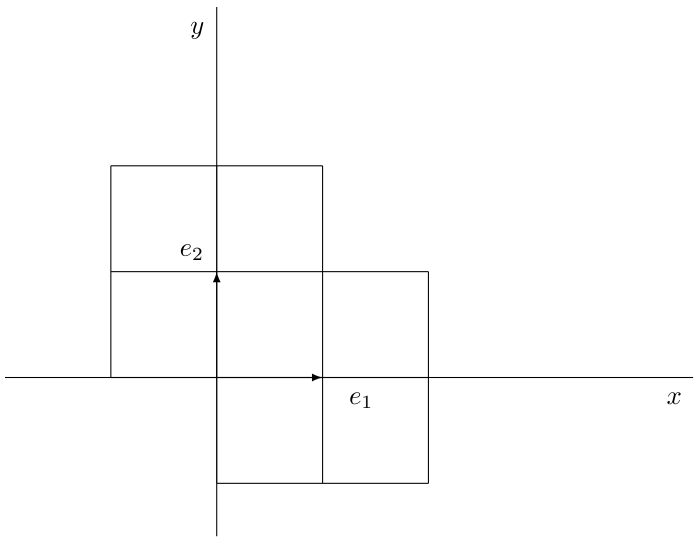
   per ogni u, v in R^2 ed ogni α in R.

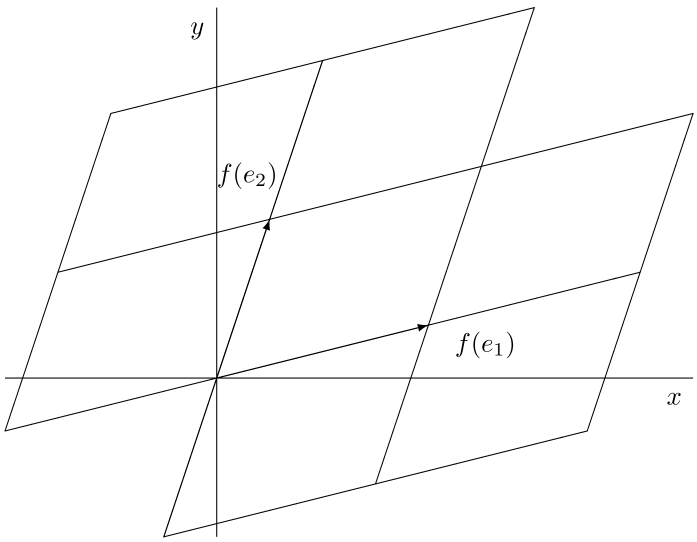
   Da cio' segue che la funzione si comporta bene anche rispetto alla operazione di prendere combinazioni lineari, cioe'

   $f(\alpha\ u + \beta\ v) = \alpha\ f(u) + \beta\ f(v),$

   per ogni u, v in R^2 ed ogni α, β in R; lo si verifichi per esercizio.

   Da cio' segue che, se conosciamo i valori di una funzione lineare su due vettori che formano una base di R^2, allora conosciamo i valori della funzione su ogni altro vettore di R^2. Di seguito sono mostrate una figura e la sua immagine tramite una funzione lineare f della quale conosciamo i valori sui vettori della base canonica.





2. Sia data matrice di tipo $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix};$$

per ogni vettore

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

in R^n, possiamo moltiplicare la matrice A per x, ottenendo cosi' il vettore

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots\dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots\dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

in R^m; otteniamo cosi' una funzione

$f : R^n \to R^m$,

$f(x) = Ax \in R^m, \qquad x \in R^n.$

Le funzioni cosi' ottenute si dicono *funzioni lineari.*

Le funzioni lineari si comportano bene rispetto alle operazioni di addizione fra vettori e di moltiplicazione di vettori per scalari, nel senso che

$f(u + v) = f(u) + f(v)$,

$f(\alpha\ u) = \alpha\ f(u)$,

per ogni u, v in R^n ed ogni α in R.

Queste proprieta', per come e' definita la funzione f, significano

$A(u + v) = Au + Av$,

$A(\alpha\ u) = \alpha\ Au$,

per ogni u, v in R^n ed ogni α in R.

Da cio' segue che le funzioni lineari si comportano bene anche rispetto alla operazione di prendere combinazioni lineari, cioe'

$f(\alpha\ u + \beta\ v) = \alpha\ f(u) + \beta\ f(v)$,

per ogni u, v in R^n ed ogni α, β in R.

3. Piu' in generale, si definiscono un'operazione di addizione fra matrici dello stesso tipo, un'operazione di moltiplicazione di una matrice per uno scalare, e si prova che il prodotto di matrici si comporta bene rispetto a queste operazioni.

   Date due matrici dello stesso tipo

   $A:\ A(i, j), \quad i = 1, \dots, m\ j = 1, \dots, n,$

   $B:\ B(i, j), \quad i = 1, \dots, m\ j = 1, \dots, n,$

sommando ciascun elemento di A con l'elemento di B che occupa lo stesso posto si ha una nuova matrice che viene detta matrice somma di A e B, e viene indicata con $A+B$:

$A+B: \ (A+B)(i,j) := A(i,j)+B(i,j), \quad i=1,\dots,m \ j=1,\dots,n.$

Dato uno scalare α, moltiplicando lo scalare α per ciascun elemento di A si ha una nuova matrice che viene detta matrice prodotto di α per A, e viene indicata con αA :

$\alpha A: \ (\alpha A)(i,j) := \alpha \ A(i,j), \quad i=1,\dots,m \ j=1,\dots,n.$

Il prodotto di matrici si comporta bene rispetto alla somma di matrici e al prodotto di scalari per matrici:

$M(P+Q)=MP+MQ$

$(N+M)P=NP+MP$

$\alpha(MN)=(\alpha M)N=M(\alpha N).$

Verifichiamo la prima proprieta', dove

$M: \ M(i,j), \quad i=1,\dots,m \ j=1,\dots,n,$

$P: \ P(j,h), \quad j=1,\dots,n, \ h=1,\dots,p$

$Q: \ Q(j,h), \quad j=1,\dots,n, \ h=1,\dots,p.$

Da una parte si ha:

$$\begin{aligned} M(P+Q)(i,h) &= \sum_j M(i,j)(P+Q)(j,h) \\ &= \sum_j M(i,j)(P(j,h)+Q(j,h)) \\ &= \sum_j [M(i,j)P(j,h)+M(i,j)Q(j,h)]; \end{aligned}$$

dall'altra si ha:

$$\begin{aligned} (MP+MQ)(i,h) &= MP(i,h)+MQ(i,h) \\ &= \sum_j M(i,j)P(j,h)+\sum_j M(i,j)Q(j,h) \\ &= \sum_j [M(i,j)P(j,h)+M(i,j)Q(j,h)]. \end{aligned}$$

4. In un certo anno, fra tre citta' A, B, C si sono registrati i seguenti spostamenti di residenza:

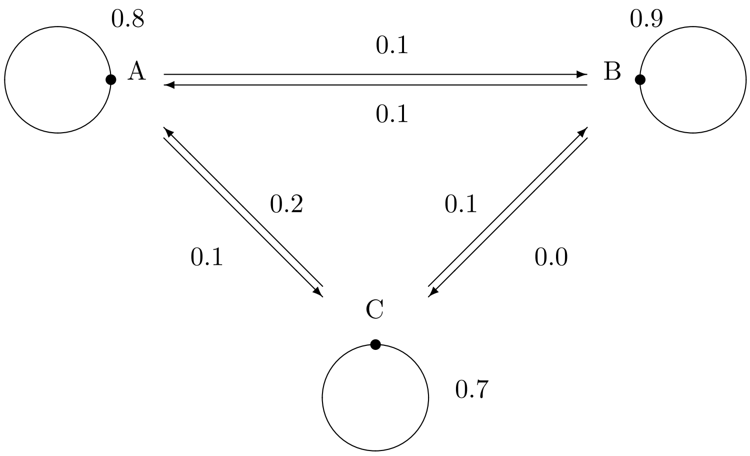
(a) sul totale dei residenti nella citta' A all'inizio dell'anno, e' risultato alla fine dell'anno che l' 80% era ancora residente in A, il 10% aveva preso residenza in B, e il 10% aveva preso residenza in C;

(b) sul totale dei residenti nella citta' B all'inizio dell'anno, e' risultato alla fine dell'anno che il 10% aveva preso residenza in in A, il 90% era ancora residente B, e lo 0% aveva preso residenza in C;

(c) sul totale dei residenti nella citta' C all'inizio dell'anno, e' risultato alla fine dell'anno che il 20% aveva preso residenza in A, il 10% aveva preso residenza in B, e il 70% era ancora residente in C.

Secondo quale legge i numeri x'_A, x'_B, x'_C dei residenti alla fine dell'anno in A, B, C, dipendono dai numeri x_A, x_B, x_C dei residenti all'inizio dell'anno in A, B, C? Supposto che nell'anno successivo si siano registrati gli stessi spostamenti percentuali, secondo quale legge i numeri x''_A, x''_B, x''_C dei residenti alla fine del secondo anno in A, B, C, dipendono dai numeri x_A, x_B, x_C?

Possiamo riassumere i dati con la figura seguente.



Ora, il numero x'_A dei residenti in A alla fine dell'anno e' la somma del numero $0.8x_A$ dei residenti in A all'inizio dell'anno che sono rimasti in A, del numero $0.1x_B$ dei residenti in B all'inizio dell'anno che si sono trasferiti in A, del numero $0.2x_C$ dei residenti in C all'inizio dell'anno che si sono trasferiti in A; argomentando in modo simile per B e C, si ottengono le relazioni

$$\begin{cases} x'_A = 0.8x_A + 0.1x_B + 0.2x_C \\ x'_B = 0.1x_A + 0.9x_B + 0.1x_C \\ x'_C = 0.1x_A + 0.7x_C \end{cases},$$

che possono essere rappresentate nella forma

$$\begin{bmatrix} x'_A \\ x'_B \\ x'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{bmatrix},$$

e sintetizzate in

$$x' = Mx.$$

Ora, se lo stesso fenomeno accade anche l'anno successivo, si ha

$$\begin{bmatrix} x''_A \\ x''_B \\ x''_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_A \\ x'_B \\ x'_C \end{bmatrix},$$

sinteticamente

$x'' = Mx'.$

Dunque si ha

$$x'' = Mx' = MMx = M^2x.$$

Dunque la relazione fra la distribuzione degli abitanti nelle tre citta' alla fine del secondo anno e quella iniziale e' descritta dalla matrice

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0.67 & 0.17 & 0.31 \\ 0.18 & 0.82 & 0.18 \\ 0.15 & 0.01 & 0.51 \end{bmatrix}.$$

5. Data la matrice

   $A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix},$

   consideriamo, per ciascun vettore x in R^2, la successione

   $x,\ Ax,\ A^2x,\ \ldots,\ A^mx,\ \ldots$

   e ci chiediamo se converge a un qualche vettore limite quando $m \to \infty$.

   Nel nostro caso, si ha che esistono dei vettori per i quali e' facile dare una risposta, e questa risposta puo' essere estesa a tutti gli altri vettori.

   Uno di questi vettori e'

   $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},$

   in quanto

   $Av_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = v_1,$

   da cui segue

$A^2v_1 = AAv_1 = Av_1 = v_1,$
in generale

$$A^m v_1 = v_1, \qquad \forall m = 1, 2, \ldots$$

Un altro di questi vettori e'

$v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$

in quanto

$Av_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}v_2,$

da cui segue

$A^2v_2 = AAv_2 = A(\frac{1}{2}v_2) = \frac{1}{2}Av_2 = \frac{1}{4}v_2,$

in generale

$$A^m v_2 = \frac{1}{2^m} v_2 \qquad \forall m = 1, 2, \ldots$$

Ora, i vettori v_1, v_2 formano una base di R^2, dunque ogni vettore x di R^2 si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare di v_1 e v_2 :

$$x = c_1 v_1 + c_2 v_2,$$

dove c_1 e c_2 sono certi scalari che dipendono da v, le coordinate di x rispetto a v_1 e v_2.

L'azione di A su x e' data da

$$Ax = A(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1Av_1 + c_2Av_2 = c_1v_1 + \frac{c_2}{2}v_2,$$

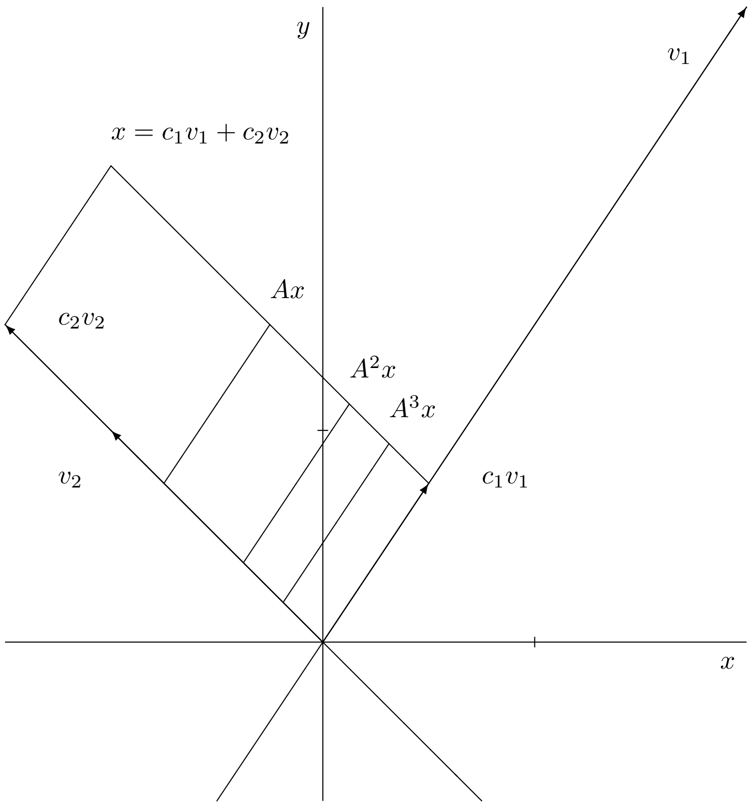
e l'azione delle potenze di A e' data da

$$A^m x = c_1 v_1 + \frac{c_2}{2^m} v_2;$$

cosi', in particolare, si ha

$$A^m x \to c_1 v_1, \quad per \quad m \to \infty.$$

A parole, possiamo dire che per ciascun vettore x di R^2, la successione $x, Ax, A^2x, \ldots$ converge ad un vettore limite: la componente di x sulla retta individuata da v_1.



Esempio.

E' dato il vettore

$$x = \left[\begin{array}{r} -1 \\ \frac{9}{4} \end{array} \right].$$

Le coordinate c_1, c_2 di x rispetto alla base formata da v_1 e v_2 sono definite implicitamente dalla relazione

$$x = v_1 c_1 + v_2 c_2, \qquad cioe' \qquad \left[\begin{array}{r} -1 \\ \frac{9}{4} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{r} 2 \\ 3 \end{array} \right] c_1 + \left[\begin{array}{r} -1 \\ 1 \end{array} \right] c_2;$$

dalla quale si ricava $c_1 = \frac{1}{4}$ e $c_2 = \frac{3}{2}$.

Dunque l'azione della potenza $m-$ma di A su x e' data da

$$A^m x = c_1 v_1 + \frac{c_2}{2^m} v_2 = \frac{1}{4} \left[\begin{array}{r} 2 \\ 3 \end{array} \right] + \frac{3}{2} \frac{1}{2^m} \left[\begin{array}{r} -1 \\ 1 \end{array} \right],$$

e si ha

$$A^m x \to \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{array} \right] \quad per\ m \to \infty.$$

6. In generale, data una matrice quadrata di ordine n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

consideriamo, per ciascun vettore x in R^n, la successione dei vettori

$x,\ Ax,\ A^2x,\ \dots,\ A^mx,\ \dots$

e ci chiediamo se converge a un qualche vettore limite quando $m \to \infty$.

Definizione *Un vettore non nullo $v \neq 0$ di R^n sul quale la matrice A agisce come la moltiplicazione per uno scalare viene detto autovettore di A. In altri termini, $0 \neq v \in R^n$ e' un autovettore di A se e solo se esiste uno scalare $\lambda \in R$ tale che*

$$Av = \lambda v;$$

lo scalare λ viene detto autovalore associato all'autovettore v. Un autovalore associato ad un qualche autovettore di A viene detto, in breve, autovettore di A. In altri termini, uno scalare λ e' un autovalore di A se e solo se esiste un vettore non nullo $0 \neq v \in R^n$ tale che

$$Av = \lambda v.$$

Se esiste una base di R^n costituita da autovettori $v_1, \dots, v_n$ della matrice A, con autovalori associati $\lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$Av_1 = \lambda_1 v_1,$

$\vdots$

$Av_n = \lambda_n v_n,$

allora, scritto il generico vettore x di R^n nella forma

$$x = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n,$$

si ha

$$Ax = \lambda_1 c_1 v_1 + \dots + \lambda_n c_n v_n;$$

e

$$A^m x = \lambda_1^m c_1 v_1 + \dots + \lambda_n^m c_n v_n.$$

Dunque il problema per un generico vettore di R^n puo' essere ricondotto al problema per gli autovettori di A.

Questo e' il caso ideale, ma non e' nemmeno detto che esistano degli autovettori. Ad esempio, si prova che la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

agisce sui vettori di R^2 ruotandoli di un angolo retto in senso antiorario, cosi' muta direzione ad ogni vettore, e non possiede alcun autovettore.