**Matematica II** 22.05.06

1. Sappiamo che la matrice
$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}$
ammette gli autovettori
$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$
con autovettori corrispondenti $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.
Mostriamo ora come questi sono stati ottenuti.

Conviene partire dagli autovalori.
Per definizione, uno scalare $\lambda$ in $R$ e' un autovalore della matrice $A$ se e solo se esiste un vettore $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \neq 0$ tale che
$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix},$
cioe'
$\begin{array}{rcl} 0.7z_1 + 0.2z_2 & = & \lambda z_1 \\ 0.3z_1 + 0.8z_2 & = & \lambda z_2 \end{array},$
oppure
$\begin{array}{rcrcl} (0.7-\lambda)z_1 & + & 0.2z_2 & = & 0 \\ 0.3z_1 & + & (0.8-\lambda)z_2 & = & 0 \end{array}.$
Ora, questo sistema lineare omogeneo ammette soluzioni non banali $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \neq 0$ se e solo se il determinante della sua matrice dei coefficienti e' nullo:

$$det \begin{bmatrix} 0.7-\lambda & 0.2 \\ 0.3 & 0.8-\lambda \end{bmatrix} = 0,$$

e questa e' la condizione che caratterizza gli autovalori di $A$.
Sviluppando il determinante, si ottiene l'equazione di secondo grado
$(0.7-\lambda)(0.8-\lambda) - 0.06 = 0,$
$\lambda^2 - 1.5\lambda - 0.5 = 0.$
Le radici sono
$\lambda_1 = \frac{1.5+\sqrt{2.25-2}}{2} = \frac{1.5+0.5}{2} = 1,$
$\lambda_2 = \frac{1.5-\sqrt{2.25-2}}{2} = \frac{1.5-0.5}{2} = \frac{1}{2}.$
Abbiamo cosi' ritrovato gli stessi autovalori, e possiamo affermare che non ce ne sono altri.

Ricerchiamo ora gli autovettori di $A$ cui corrisponde l'autovalore $\lambda = 1$. Per definizione, questi sono i vettori $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \neq 0$ tali che

$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix},$$

cioe'

$$\begin{array}{rcl} 0.7z_1 + 0.2z_2 & = & z_1 \\ 0.3z_1 + 0.8z_2 & = & z_2 \end{array},$$

oppure

$$\begin{array}{rcrcl} -0.3z_1 & + & 0.2z_2 & = & 0 \\ 0.3z_1 & - & 0.2z_2 & = & 0 \end{array}.$$

Ora, questo sistema di due equazioni e' equivalente all'unica equazione

$$-0.3z_1 \quad + \quad 0.2z_2 \quad = \quad 0 \ ,$$

che puo' essere risolta rispetto a $z_1$, ottenendo $z_1 = \frac{2}{3}z_2$, e cosi' le infinite soluzioni

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}p \\ p \end{bmatrix},$$

dipendenti dal parametro $p$.

Abbiamo cosi' trovato infiniti autovettori cui e' associato l'autovalore $\lambda = 1$ : sono tutti e soli i vettori non nulli di una certa retta per l'origine; il vettore $v_1$ e' uno di questi.

Ricerchiamo ora gli autovettori di $A$ cui corrisponde l'autovalore $\lambda = \frac{1}{2}$. Per definizione, questi sono i vettori $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \neq 0$ tali che

$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix},$$

cioe'

$$\begin{array}{rcl} 0.7z_1 + 0.2z_2 & = & 0.5z_1 \\ 0.3z_1 + 0.8z_2 & = & 0.5z_2 \end{array},$$

oppure

$$\begin{array}{rcrcl} 0.2z_1 & + & 0.2z_2 & = & 0 \\ 0.3z_1 & + & 0.3z_2 & = & 0 \end{array}.$$

Ora, questo sistema di due equazioni e' equivalente all'unica equazione

$$0.2z_1 \quad + \quad 0.2z_2 \quad = \quad 0 \ ,$$

che puo' essere risolta rispetto a $z_1$, ottenendo $z_1 = -z_2$, e cosi' le infinite soluzioni

$$\begin{bmatrix} -q \\ q \end{bmatrix},$$

dipendenti dal parametro $q$.

Abbiamo cosi' trovato infiniti autovettori cui e' associato l'autovalore $\lambda = \frac{1}{2}$ : sono tutti e soli i vettori non nulli di una certa retta per l'origine; il vettore $v_2$ e' uno di questi.

2. In generale, data una matrice quadrata di ordine $n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

la ricerca degli autovalori e degli autovettori di $A$ puo' essere sviluppata come segue.

Per definizione, uno scalare $\lambda$ in $R$ e' un autovalore della matrice $A$ se e solo se esiste in $R^n$ un vettore non nullo $z = [z_i]_{i=1,\dots,n} \neq 0$ tale che

$Az = \lambda z$

cioe'

$(A - \lambda I)z = 0,$

dove $I$ e' la matrice unita' di ordine $n$. Ora, questo sistema lineare omogeneo di $n$ equazioni in $n$ incognite ammette soluzioni non banali $z = [z_i]_{i=1,\dots,n} \neq 0$ se e solo se il determinante della sua matrice dei coefficienti e' nullo:

$$det(A - \lambda I) = 0,$$

e questa e' la condizione che caratterizza gli autovalori di $A$.

Sviluppando il determinante, si ottiene un polinomio di grado $n$ in $\lambda$, del tipo

$\pm\lambda^n \mp c_1\lambda^{n-1} \pm \cdots + c_n,$

dove $c_1, \dots, c_n$ sono coefficienti dipendenti da $A$, e $c_n = det(A)$. Questo polinomio viene detto *polinomio caratteristico della matrice* $A$; possiamo dunque dire che

- *gli autovalori di $A$ sono le radici del polinomio caratteristico di $A$.*

Osserviamo che il polinomio caratteristico della matrice $A$, avendo grado $n$, puo' avere al massimo $n$ radici distinte, cosi' la matrice $A$ puo' avere al massimo $n$ autovalori distinti. Potrebbe anche non avere alcun autovalore reale. Ad esempio, la matrice

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ha polinomio caratteristico

$$det(H-\lambda I) = det\begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2+1,$$

che non ha alcuna radice reale ( ha radici complesse $\pm i$, ma noi ci limitiamo ai vettori reali ...). Dunque la matrice $H$ non possiede alcun autovalore reale, e di conseguenza non possiede alcun autovettore reale.

Gli autovettori cui e' associato un certo autovalore $\lambda_0$ della matrice $A$ sono i vettori $z = [z_i]_{i=1,\dots,n} \neq 0$ tali che

$Az = \lambda_0 z$,

sono cioe' le soluzioni non banali del sistema lineare omogeneo

$$\begin{array}{ccccccc} (a_{11}-\lambda_0)z_1 & + & \cdots & + & a_{1n}z_n & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{n1}z_1 & + & \cdots & + & (a_{nn}-\lambda_0)z_n & = & 0 \end{array}.$$

3. Qui di seguito e' riportata nota di una breve sessione con Octave, nella quale si descrive l'uso della funzione 'eig' che fornisce autovalori (eigenvalues) e autovettori (eigenvectors) di una matrice.

```
>> help eig
eig is a built-in function

 - Loadable Function: LAMBDA = eig (A)
 - Loadable Function: [V, LAMBDA] = eig (A)
     The eigenvalues (and eigenvectors) of a matrix are computed ...

>> A = [-2 1 1; 1 -2 1; 1 1 -2]
A =

       -2          1          1
        1         -2          1
        1          1         -2

>> eig(A)
ans =

  -3.00000
  -3.00000
   0.00000
```

Gli autovalori di $A$ sono -3, con molteplicita' 2, e 0, con molteplicita' 1; cio' significa che il polinomio caratterisico di $A$ e', a meno del segno,

$(\lambda+3)^2\lambda$

```
>> [V,L]=eig(A)
V =

   0.70711  -0.40825   0.57735
  -0.70711  -0.40825   0.57735
   0.00000   0.81650   0.57735

L =

  -3.00000   0.00000   0.00000
   0.00000  -3.00000   0.00000
   0.00000   0.00000   0.00000
```

le colonne di V sono autovettori di A; gli elementi diagonali di L sono gli autovalori di A associati alle varie colonne della matrice V; lo verifichiamo:

```
>> A*V(:,1)
ans =

  -2.12132
   2.12132
   0.00000

>> -3*V(:,1)
ans =

  -2.12132
   2.12132
  -0.00000

>> A*V(:,2)
ans =

   1.22474
   1.22474
  -2.44949

>> -3*V(:,2)
ans =

   1.22474
   1.22474
  -2.44949
```

```
>> A*V(:,3)
ans =

         0
         0
         0
```