Algebra/ Algebra Lineare, 21.02.07

- Un'*equazione lineare* in n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e' un'espressione del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \qquad cioe' \qquad \sum_{j=1}^{n} a_jx_j = b,$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ sono costanti reali; gli a_i sono i *coefficienti* e b e' il *termine noto* dell'equazione. Una *soluzione* di questa equazione e' una $n-$pla $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ di numeri reali che sostituiti ordinatamente alle incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rendono vera l'uguaglianza

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = b.$$

Se qualche coefficiente dell'equazione e' non nullo, indicato con a_i il primo coefficiente non nullo, possiamo ricavare x_i in funzione delle successive incognite, ottenendo

$$x_i = -\frac{a_{i+1}}{a_i}x_{i+1} - \frac{a_{i+2}}{a_i}x_{i+2} - \cdots - \frac{a_n}{a_i}x_n + b$$

e possiamo descrivere l'insieme delle soluzioni come

$$\begin{array}{l}
x_1 = p_1 \\
\vdots \\
x_{i-1} = p_{i-1} \\
x_i = -\frac{a_{i+1}}{a_i}p_{i+1} - \frac{a_{i+2}}{a_i}p_{i+2} - \cdots - \frac{a_n}{a_i}p_n + \frac{b}{a_i} \quad , \\
x_{i+1} = p_{i+1} \\
\vdots \\
x_n = p_n
\end{array}$$

dove $p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_n$ sono parametri reali liberi.

- Un *sistema di m equazioni lineari* in n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e' una sequaenza di m equazioni lineari

$$\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}$$

in altri termini

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

dove $a_{11}, a_{12}, \ldots, b_1, \ldots, a_{mn}, b_m$ sono costanti reali; gli a_{ij} sono i *coefficienti* e i b_j sono i *termini noti* del sistema. Una *soluzione* di questo sistema e' una $n-$pla $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ di numeri reali soluzione di ciscuna equazione del sistema:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}s_j = b, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Il sistema si dice

- *impossibile* se non possiede alcuna soluzione;
- *determinato* se possiede una ed una sola soluzione;
- *indeterminato* se possiede piu' di una soluzione.

Vedremo in seguito che un sistema indeterminato inrealta' possiede inmfinite soluzioni ...

Diciamo che due sistemi lineari sono equivalenti quando hanno lo stesso insieme delle soluzioni.

- Possiamo rappresentare i dati che caratterizzano il sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

con una matrice avente nelle prima riga i coefficienti e il termine noto della prima equazione, nelle seconda riga i coefficienti e il termine noto della seconda equazione, ...

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

detta *matrice completa* del sistema; nella prima colonna di questa matrice compaiono i coefficienti della prima incognita x_1 nelle varie equazioni, nella seconda colonna di questa matrice compaiono i coefficienti della seconda incognita x_1 nelle varie equazioni, ... nell'ultima colonna di questa matrice compaiono i termini noti delle varie equazioni. La matrice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

viene detta matrice dei coefficienti del sistema.

- Consideriamo un generico sistema lineare di m equazioni in n incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

nel quale la incognita x_1 compaia effettivamente, cioe' compaia con un coefficiente $\neq 0$ in almeno una equazione; a meno di uno scambio di equazioni, possiamo supporre che x_1 compaia effettivamente nella prima equazione, cioe' che sia $a_{11} \neq 0$.

Possiamo eliminare la stessa incognita x_1 dalla seconda equazione, sommando alla seconda equazione la prima moltiplicata per $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n - \frac{a_{21}}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) = b_1 - \frac{a_{21}}{a_{11}}(b_2)$$

ottenendo cosi' un'equazione del tipo

$$a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2.$$

Analogamente, possiamo eliminare la stessa incognita x_1 dalla terza equazione, sommando alla terza equazione la prima moltiplicata per $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$, ottenendo cosi' un'equazione del tipo

$$a'_{32}x_2 + \dots + a'_{3n}x_n = b'_3;$$

... e cosi' fino ad eliminare x_1 dall'ultima equazione, ottenendo cosi' un sistema lineare del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad \vdots \\ \qquad a'_{m2}x_2 + \dots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}.$$

Questo sistema e' equivalente al sistema originario.

Abbiamo cosi' sostanzialmente ricondotto la soluzione del sistema originario di m equazioni lineari nelle n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ alla soluzione di un sistema di $m-1$ equazioni lineari nelle $n-1$ incognite $x_2, \ldots, x_n$.

L'iterazione di questo processo porta ad un metodo di risoluzione dei sistemi lineari, detto *metodo di eliminazione di Gauss.*

- In termini matriciali, il processo di eliminazione puo' essere descritto nel modo seguente. Consideriamo una matrice di m righe ed $n+1$ colonne

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

nella cui prima riga il primo elemento a_{11} e' non nullo.

nella quale la prima colonna non sia completamente nulla; a meno di uno scambio di righe, possiamo supporre che $a_{11} \neq 0$.

Possiamo annullare il primo elemento della seconda riga, sommando alla seconda riga la prima riga moltiplicata per $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$:

$$(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, b_2) - \frac{a_{21}}{a_{11}} (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, b_1)$$

ottenendo cosi' una riga del tipo

$$(0, a'_{22}, \ldots, a'_{2n}, b'_2)\,,$$

... e cosi' fino ad annullare il primo elemento dell'ultima riga, ottenendo cosi' una matrice del tipo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \ldots & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right].$$

- **Illustrazione.** Consideriamo il sistema lineare di quattro equazioni nelle cinque incognite u, v, w, x, y, con la corrispondente matrice completa

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcr} u & +2v & +3w & +x & +y & = & 4 \\ u & +2v & +3w & +2x & +3y & = & -2 \\ u & +v & +w & +x & +y & = & -2 \\ -3u & -5v & -7w & -4x & -5y & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & -7 & -4 & -5 & 0 \end{array}\right].$$

Di seguito riportiamo i passi del metodo di eliminazione di Gauss, descritti sia sul sistema che sulla corrispondente matrice. Svolgiamo i passi cercando di essere il piu' possibile sistematici, come li potrebbe svolgere un elaboratore.

$$\begin{cases} u & +2v & +3w & +x & +y & = & 4 \\ & & & x & +2y & = & -6 \\ & -v & -2w & & & = & -6 \\ & v & +2w & -x & -2y & = & 12 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 12 \end{array}\right].$$

$$\begin{cases} u & +2v & +3w & +x & +y & = & 4 \\ & -v & -2w & & & = & -6 \\ & & & x & +2y & = & -6 \\ & v & +2w & -x & -2y & = & 12 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 12 \end{array}\right].$$

$$\begin{cases} u & +2v & +3w & +x & +y & = & 4 \\ & -v & -2w & & & = & -6 \\ & & & x & +2y & = & -6 \\ & & & -x & -2y & = & 6 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 6 \end{array}\right].$$

$$\begin{cases} u & +2v & +3w & +x & +y & = & 4 \\ & -v & -2w & & & = & -6 \\ & & & x & +2y & = & -6 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

L'ultima equazione e'diventata un'identita'.

Ora, dalla terza equazione ricaviamo la prima incognita che in essa compare, la x, in funzione della y :

$$x = -2y - 6.$$

Nella seconda equazione sostituiamo la x con la sua espressione in funzione della y e ricaviamo la prima incognita che in essa compare, la v, in funzione della w e della y :

$$v = -2w + 6.$$

Nella prima equazione sostituiamo la x con la sua espressione in funzione della y, sostituiamo la v con la sua espressione in funzione della w e della y, e ricaviamo la prima incognita che in essa compare, la u, in funzione della w e della y :

$$\begin{aligned} u &= -2v - 3w - x - y + 4 \\ &= -2(-2w + 6) - 3w - (-2y - 6) - y + 4 \\ &= w + y - 2. \end{aligned}$$

Dunque il sistema e' indeterminato, ha infinite soluzioni del tipo

$$\begin{array}{lcl} u & = & p+q-2 \\ v & = & -2p+6 \\ w & = & p \\ x & = & -2q-6 \\ y & = & q \end{array},$$

che dipendono da due parametri liberi p, q in R. In altri termini, le soluzioni del sistema sono le quintuple di numeri reali del tipo

$$(p+q-2, -2p+6, p, -2q-6, q),$$

ottenute al variare di p, q in R.

- **Illustrazione.** Consideriamo il sistema lineare di quattro equazioni nelle quattro incognite x, y, z, t con la corrispondente matrice completa

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} x & -2y & & & = & 5 \\ -x & +2y & -3z & & = & -2 \\ & -2y & +3z & -4t & = & -11 \\ & & -3z & +4t & = & 15 \end{array} \right. \qquad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 15 \end{array} \right].$$

Di seguito riportiamo i passi del metodo di eliminazione di Gauss, descritti sia sul sistema che sulla corrispondente matrice. Svolgiamo i passi cercando di essere il piu' possibile sistematici, come li potrebbe svolgere un elaboratore.

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} x & -2y & & & = & 5 \\ & & -3z & & = & 3 \\ & -2y & +3z & -4t & = & -11 \\ & & -3z & +4t & = & 15 \end{array} \right. \qquad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 15 \end{array} \right].$$

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} x & -2y & & & = & 5 \\ & -2y & +3z & -4t & = & -11 \\ & & -3z & & = & 3 \\ & & -3z & +4t & = & 15 \end{array} \right. \qquad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 15 \end{array} \right].$$

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} x & -2y & & & = & 5 \\ & -2y & +3z & -4t & = & -11 \\ & & -3z & & = & 3 \\ & & & +4t & = & 12 \end{array} \right. \qquad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \end{array} \right].$$

A questo punto dalla quarta equazione possiamo ricavare la t :

$$t = 3;$$

nella terza equazione eventualmente sostituire questo valore di t e ricavare la z :

$$z = -1;$$

nella seconda equazione eventualmente sostituire questi valori di t e di z e ricavare la y :

$$-2y - 3 - 12 = -11, \qquad y = -2;$$

nella prima equazione eventualmente sostituire questi valori di t, z, y e ricavare la x :

$$x + 4 = 5, \qquad x = 1.$$

Dunque il sistema e' determinato ed ha come unica soluzione la quaterna $(1, -2, -1, 3)$.