Algebra/ Algebra Lineare, 23.02.07

1. Un sistema di m equazioni lineari in n incognite $x_1, \ldots x_n$ aventi tutte termine noto nullo

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0, \qquad i = 1, \ldots, m$$

si dice *omogeneo*; ponendo $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ si ha una soluzione del sistema, detta *soluzione banale.*

2. **Problema** Caratterizzare le matrici

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

tali che tutti i sistemi lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

che le ammettono come matrice dei coefficienti siano determinati.

3. Una matrice quadrata A che e' la matrice dei coefficienti di almeno un sistema lineare non determinato viene detta *matrice singolare*; in caso contrario, cioe' se tutti i sistemi lineari che ammettono A come matrice dei coefficienti sono determinati, A viene detta *matrice non singolare.*

   - Sia
   $$A = [a]$$
   una matrice quadrata di ordine 1. Le equazioni lineari che hanno a come coefficiente sono del tipo
   $$ax = b,$$
   con $b \in R$. Se $a \neq 0$, ciascuna di queste equazioni ha una ed una sola soluzione $x = a^{-1}b$, cioe' e' determinata; se $a = 0$, queste equazioni sono impossibili (per $b \neq 0$) o indeterminate (per $b = 0$). Dunque A e' non singolare se e solo se $a \neq 0$.

- Sia
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
una matrice quadrata di ordine 2. I sistemi lineari che hanno A come matrice dei coefficienti sono del tipo
$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$
con $p, q \in R$. Nele considerazioni sequenti supponiamo, per semplicita', che $b \neq 0$ e $d \neq 0$, ma l'affermazione che faremo alla fine vale in generale. Sotto queste ipotesi, le due equazioni del sistema possono essere riscritte come
$$\begin{array}{l} y = -\frac{a}{b}x + \frac{p}{b} \\ y = -\frac{c}{d}x + \frac{q}{d} \end{array},$$
e possono essere riguardate come le equazioni di due rette non parallele all'asse y. Se queste due rette hanno la stessa pendenza
$$-\frac{a}{b} = -\frac{c}{d}, \qquad cioe' \qquad ad - bc = 0,$$
allora esse sono parallele o coincidenti, cioe' il sistema e' impossibile o indeterminato. Dunque A e' non singolare se e solo se
$$ad - bc \neq 0.$$

- Sia
$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}, \qquad con \quad a, d, f \neq 0,$$
una matrice quadrata di ordine 3, triangolare superiore nondegenere. I sistemi lineari che hanno A come matrice dei coefficienti sono del tipo
$$\begin{cases} ax + by + cz = p \\ \qquad dy + ez = q \\ \qquad\qquad fz = r \end{cases}$$
con $p, q, r \in R$. Osserviamo che la terza equazione, essendo $f \neq 0$, determina univocamente l'incognita z, e dunque la seconda equazione, essendo $d \neq 0$, determina univocamente l'incognita y, e infine la prima equazione, essendo $a \neq 0$, determina univocamente l'incognita x; in definitiva, il sistema e' determinato.

  Arriviamo cosi' a vedere che tutte le matrici triangolari superiori non degeneri sono non singolari.

4. **Teorema 1** *Per una matrice quadrata A le seguenti condizioni sono equivalenti.*

   - *A e' non singolare;*
   - *il sistema lineare omogeneo avente A come matrice dei coefficienti ha solo la soluzione banale.*
   - *l'algoritmo di Gauss trasforma A in una matrice triangolare superiore non degenere.*

5. Consideriamo ora le matrici rettangolari in senso stretto. Premettiamo alcune osservazioni sulle matrici con al piu' due righe o al piu' due colonne.

   - Sia data una matrice riga con almeno 2 elementi.

     $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}, \qquad n \geq 2.$$

     L'equazione lineare omogenea che ha A come matrice dei coefficienti e'

     $$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0.$$

     Se $a_{11} = 0$, allora questa equazione possiede certamente (potrebbero essercene delle altre) le infinite soluzioni del tipo

     $$\begin{array}{l} x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{array}$$

     dove t e' un parametro reale libero.
     Se $a_{11} \neq 0$, allora questa equazione puo' essere risolta esplicitando l'incognita x_1 in funzione delle altre $x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$ ed ottenendo cosi' le infinite soluzioni

     $$\begin{array}{l} x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}t_2 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}t_n \\ x_2 = t_2 \\ \vdots \\ x_n = t_n \end{array}$$

     dove $t_2, \dots, t_n$ sono parametri reali liberi; la condizione $n \geq 2$ assicura l'esistenza di almeno un parametro libero. Dunque in ogni caso l'equazione e' indeterminata.

   - Sia data una matrice con 2 righe ed almeno 3 colonne.

     $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix}, \qquad n \geq 3.$$

Il sistema lineare omogeneo che ha A come matrice dei coefficienti e'

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \end{cases}.$$

Se $a_{11} = a_{21} = 0$, allora questo sistema possiede certamente (potrebbero essercene delle altre) le infinite soluzioni del tipo

$$\begin{aligned} x_1 &= t \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ &\vdots \\ x_n &= 0 \end{aligned}$$

dove t e' un parametro reale libero.
Supponiamo ora che uno dei due coefficienti della x_1 sia diverso da zero; possiamo pensare che $a_{11} \neq 0$. Allora sommando alla seconda equazione la prima equazione moltiplicata per $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ possiamo eliminare l'incognita x_1 dalla seconda equazione

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots+a_{2n}x_n-\frac{a_{21}}{a_{11}}\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n\right) = 0$$

ottenendo una nuovo sistema del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n = 0 \end{cases}$$

Nella seconda equazione compaiono ora $n - 1 \geq 3 - 1 = 2$ incognite, cosi', per il punto precedente, essa possiede infinite soluzioni. Queste danno origine a infinite soluzioni del sistema lineare; infatti a ciascuna soluzione della seconda equazione

$$\begin{aligned} x_2 &= s_2 \\ x_3 &= s_3 \\ &\vdots \\ x_n &= s_n \end{aligned}$$

corrisponde la soluzione del sistema

$$\begin{aligned} x_1 &= -\tfrac{a_{12}}{a_{11}}s_2 - \tfrac{a_{13}}{a_{11}}s_3 - \cdots - \tfrac{a_{1n}}{a_{11}}s_n \\ x_2 &= s_2 \\ x_3 &= s_3 \\ &\vdots \\ x_n &= s_n \end{aligned}.$$

Dunque in ogni caso il sistema lineare e' indeterminato.

Con argomenti analoghi si possono provare i risultati seguenti.

- Sia data una matrice colonna con almeno 2 elementi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \qquad n \geq 2.$$

Allora esistono dei numeri reali $b_1, \ldots, b_m$ tali che il sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 = b_m \end{cases}$$

sia impossibile.

- Sia data una matrice con 2 colonne ed almeno 3 righe

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{bmatrix}, \qquad m \geq 3.$$

Allora esistono dei numeri reali $b_1, \ldots, b_m$ tali che il sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 = b_m \end{cases}$$

sia impossibile.

6. **Teorema 2** *Sia*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

una matrice di tipo $m \times n$.

- *Se $m < n$, allora il sistema lineare omogeneo*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

e' indeterminato.

- *Se $m > n$, allora esistono dei numeri reali $b_1, \ldots, b_m$ tali che il sistema lineare*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

sia impossibile.

- *Se tutti i sistemi lineari che ammettono A come matrice dei coefficienti sono determinati, allora $m = n$, cioe' A deve essere quadrata.*

7. **Problema** Dati m punti

$$(p_1, q_1),\ (p_2, q_2),\ \ldots,\ (p_m, q_m)$$

nel piano R^2, si determinino gli eventuali polinomi

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$$

di grado al piu' n tali che

$$f(p_i) = q_i, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Vedremo in seguito applicazioni a questo problema dei teoremi precedenti.