Algebra/ Algebra Lineare; 26.02.07

Principali strumenti finora considerati per la risoluzione del generico sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

di m equazioni in n incognite e'

1. **Eliminazione di una variabile**:

   - Supponiamo che la prima incognita compaia con coefficiente $\neq 0$ in almeno una equazione; eventualmente scambiando le equazioni possiamo pensare che $a_{11} \neq 0$. Allora possiamo eliminare l'incognita x_1 dalla seconda, terza, ..., $m-$ma equazione sommando ad esse opportuni multipli della rima equazione. Otteniamo un nuovo sistema lineare del tipo

     $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\quad \vdots \\ \qquad\quad a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases},$$

     ed equivalente a quello originario.
     Abbiamo cosi' ricondotto la risoluzione del sistema dato, di m equazioni in n incognite, alla soluzione del sistema

     $$\begin{cases} a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases},$$

     di $m-1$ equazioni in $n-1$ incognite. Se questo sistema e' impossibile, lo sara' anche il sistema dato. Se questo sistema e' possibile, ad ogni sua soluzione

     $$\begin{array}{l} x_2 = s_2 \\ x_3 = s_3 \\ \vdots \\ x_n = s_n \end{array},$$

corrisponde la soluzione

$$\begin{array}{l} x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} s_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} s_3 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} s_n \\ x_2 = s_2 \\ x_3 = s_3 \\ \vdots \\ x_n = s_n \end{array} .$$

del sistema dato. In questo modo si ottengono tutte le soluzioni del sistema dato, e ciascuna di esse una ed una sola volta.

Si ha dunque in questo caso che il sistema dato e' indeterminato, determinato o impossibile se e solo se il sottosistema e' rispettivamente indeterminato, determinato o impossibile.

- Supponiamo che la prima incognita non compaia in alcuna equazione. Abbiamo cosi' in realta' un sistema lineare del tipo

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. ,$$

che possiamo riguardare come un sistema di m equazioni in $n-1$ incognite. Se questo sistema e' impossibile, lo sara' anche il sistema dato. Se questo sistema e' possibile, ad ogni sua soluzione

$$\begin{array}{l} x_2 = s_2 \\ x_3 = s_3 \\ \vdots \\ x_n = s_n \end{array} ,$$

corrispondono infinite soluzioni

$$\begin{array}{l} x_1 = t \\ x_2 = s_2 \\ x_3 = s_3 \\ \vdots \\ x_n = s_n \end{array} .$$

del sistema dato, dove t e' un parametro reale libero. In questo modo si ottengono tutte le soluzioni del sistema dato.

Si ha dunque in questo caso che il sistema dato e' indeterminato o impossibile secondoche il sottosistema sia possibile o impossibile.

2. **Metodo di eliminazione di Gauss**: si tratta della procedura che si ottiene iterando l'eliminazione di una variabile. Il sistema originario viene trasformato in un sistema *a scala* del tipo

$$\begin{cases} a_{1i_1}x_{i_1} \quad + \cdots & & & & & = b_1 \\ & a_{2i_2}x_{i_2} \quad + \cdots & & & & = b_2 \\ & & a_{3i_3}x_{i_3} \quad + \cdots & & & = b_3 \\ & & & \vdots & & = \vdots \\ & & & a_{pi_p}x_{i_p} \quad + \cdots & & = b_p \\ & & & & 0 & = b_{p+1} \\ & & & & 0 & = b_{p+2} \\ & & & & \vdots & = \vdots \\ & & & & 0 & = b_m \end{cases},$$

dove

$$1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < \cdots < i_p \leq n, \qquad 0 \leq p \leq m,$$

equivalente a quello originario. Le variabili

$$x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots, x_{i_p}$$

vengono dette *variabili fondamentali* del sistema, le altre variabili vengono dette *variabili libere.*

Il sistema e' possibile se e solo se

$$b_{p+1} = b_{p+2} = \ldots = b_m = 0.$$

Sotto questa condizione si ha:

- se tutte le variabili sono fondamentali, allora il sistema e' determinato;
- se c'e' almeno una variabile libera, il sistema si puo' risolvere rispetto alle variabili fondamentali, ricavandole in funzione delle variabili libere, e il sistema risulta indeterminato.

Intermezzo. Induzione Matematica.

Si tratta di un metodo di dimostrazione. Ne diamo una descrizione un po' informale, ma sufficiente per i nostri scopi.

1. Partiamo da un problema. Supponiamo di essere interessati a calcolare la somma dei primi 100 numeri dispari:

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + 199.$$

A prima vista cio' sembra molto complicato. Possiamo ampliare il problema alla ricerca di una formula per la somma dei primi n numeri dispari:

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1).$$

Questo e' un compito piu' ambizioso, ma ci permette di considerare assieme ai casi complicati anche i casi piu' semplici. Considerando i primi quattro casi

$1 = 1$

$1 + 3 = 4$

$1 + 3 + 5 = 9$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16$

siamo portati a pensare che la somma dei primi n numeri dispari sia n^2 :

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2.$$

Certamente cio' e' vero nei casi che abbiamo visto e che ce lo hanno suggerito ... ma sara' vero per ogni n?

2. **Dimostrazione per induzione.** *Data una famiglia di proposizioni che si possono disporre in una successione*

$$P(1), P(2), P(3), \ldots, P(n), \ldots,$$

dimostrare per induzione che ciascuna di queste proposizioni e' vera significa:

- *dimostrare che la prima proposizione* $P(1)$ *e' vera, e*
- *per ciascun* $n > 1$, *assumendo per ipotesi che la proposizione* $P(n-1)$ *sia vera, dimostrare che la proposizione successiva* $P(n)$ *e' vera.*

3. Nel nostro caso, la proposizione $P(n)$ afferma

$$(\textit{somma dei primi n numeri dispari}) = n^2.$$

La prima proposizione $P(1)$ e' certamente vera.

Ora, per ciascun $n > 1$, assumendo per ipotesi che la proposizione $P(n-1)$ sia vera, dimostriamo che la proposizione successiva $P(n)$ e' vera:

$$\begin{aligned} (\textit{somma dei primi n numeri dispari}) &= \\ (\textit{somma dei primi } n-1 \textit{ numeri dispari}) + (n - \textit{mo numero dispari}) &= \\ (n-1)^2 + 2n - 1 &= \\ n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 &= n^2. \end{aligned}$$

Sistemi lineari con meno equazioni che incognite.

1. **Teorema**

   Ogni sistema lineare con meno equazioni che incognite e' indeterminato o impossibile.

   Dimostrazione. Dimostriamo l'enunciato per induzione sul numero delle equazioni. Per ogni intero positivo m consideriamo la proposizione $P(m)$:

   - *ciascun sistema di m equazioni lineari in piu' di m incognite e' indeterminato o impossibile.*

   La prima proposizione $P(1)$:

   - *ciascuna equazione lineare in piu' di una incognita e' indeterminata o impossibile.*

   e' certamente vera.

   Ora, per ciascun $m > 1$, assumendo per ipotesi che sia vera la proposizione $P(m-1)$, dimostriamo che la proposizione successiva $P(m)$ e' vera.

   Un qualsiasi sistema di $m > 1$ equazioni lineari in $n > m$ incognite e' equivalente ad un sistema lineare di uno dei due tipi

   - $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\quad \vdots \\ \qquad\quad a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}, \qquad a_{11} \neq 0;$$

     Consideriamo il sottosistema costituito dalle equazioni seconda, ..., $m-$ma nelle incognite $x_2, \ldots, x_n$, ed osserviamo che il suo numero di equazioni $m-1$ e' minore del suo numero di incognite $n-1$.

     Ora, per l'ipotesi di induzione abbiamo che questo sottosistema e' impossibile o indeterminato; per le considerazioni svolte sull'eliminazione, impossibile o indeterminato sara' anche il sistema.

   - $$\begin{cases} a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

     Sempre per le considerazioni svolte sull'eliminazione, un sistema cosi' e' impossibile o indeterminato.

   cvd