Algebra/ Algebra Lineare; 02.03.07 (seconda parte)

1. Moltiplicando una matrice A quadrata di ordine n per una colonna $\underline{v}^{(0)} \in R^{n\times 1}$ otteniamo una nuova colonna $\underline{v}^{(1)} = A\underline{v}^{(0)} \in R^{n\times 1}$; moltiplicando A per la colonna $\underline{v}^{(1)}$ otteniamo un'altra colonna $\underline{v}^{(2)} = A\underline{v}^{(1)} \in R^{n\times 1}$ ...; iterando, otteniamo una successione

$$\begin{array}{rcl} \underline{v}^{(1)} & = & A\underline{v}^{(0)} \\ \underline{v}^{(2)} & = & A\underline{v}^{(1)} \\ \underline{v}^{(3)} & = & A\underline{v}^{(2)} \\ \vdots & & \\ \underline{v}^{(t)} & = & A\underline{v}^{(t-1)} \\ \vdots, & & \end{array}$$

in altri termini

$$\begin{array}{rcl} \underline{v}^{(1)} & = & A\underline{v}^{(0)} \\ \underline{v}^{(2)} & = & A^2\underline{v}^{(0)} \\ \underline{v}^{(3)} & = & A^3\underline{v}^{(0)} \\ \vdots & & \\ \underline{v}^{(t)} & = & A^t\underline{v}^{(0)} \\ \vdots & & \end{array}$$

Siamo cosi' portati a considerare le potenze

$$A^t$$

della matrice A. Il calcolo delle potenze di una matrice quadrata e' in generale molto complesso. Per certe matrici pero' questo calcolo risulta particolarmente semplice, e in certi casi ci si puo' ricondurre a queste.

2. Una matrice quadrata, come

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix},$$

nella quale tutti gli elementi fuori dalla diagonale sono nulli, viene detta *matrice diagonale.* Possiamo rappresentare una qualsiasi matrice diagonale di ordine n come

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix},$$

scrivendo solo gli elementi sulla diagonale.

Si verifica che premoltiplicare una matrice A per una matrice diagonale D ha lo stesso effetto di moltiplicare ciscuna riga di A per il corrispondente elemento diagonale di D :

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(1,:) \\ \hline A(2,:) \\ \hline \vdots \\ \hline A(n,:) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1A(1,:) \\ \hline a_2A(2,:) \\ \hline \vdots \\ \hline a_nA(n,:) \end{bmatrix}$$

Si verifica che postmoltiplicare una matrice A per una matrice diagonale D ha lo stesso effetto di moltiplicare ciscuna colonna di A per il corrispondente elemento diagonale di D :

$$\left[\begin{array}{c|c|c} A(:,1) & A(:,2) & \ldots \quad A(:,n) \end{array}\right] \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} a_1A(:,1) & a_2A(:,2) & \ldots \quad a_nA(:,n) \end{array}\right]$$

In particolare, il prodotto di due matrici diagonali e' una matrice diagonale, e gli elementi diagonali della matrice prodotto sono i prodotti degli elementi corrispondenti delle due matrici fattori:

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & & & \\ & a_2 b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n b_n \end{bmatrix}$$

Piu' in particolare, la potenza $t-$ma di una matrice diagonale e' una matrice diagonale, e gli elementi diagonali della matrice potenza $t-$ma sono le potenza $t-$ma degli elementi della matrice:

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a_1^t & & & \\ & a_2^t & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^t \end{bmatrix}$$

3. Mostriamo ora su un esempio come il calcolo delle potenze di una matrice non diagonale possa essere ricondotto al calcolo delle potenze di una opportuna matrice diagonale.

   Sia data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}.$$

   Ci sono delle colonne sulle quali A agisce in modo particolarmente semplice: una e'
$\underline{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix},$
in quanto

$$A\underline{u} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{u};$$

   un'altra e'
$\underline{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$
in quanto

$$A\underline{v} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 0.5\ \underline{v}.$$

   In entrambi i casi, A agisce come la moltiplicazione per un numero reale:

$$A\underline{u} = \underline{u}, \qquad A\underline{v} = 0.5\ \underline{v}.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} A\left[\ \underline{u} \mid \underline{v}\ \right] &= \left[\ A\underline{u} \mid A\underline{v}\ \right] \\ &= \left[\ \underline{u} \mid 0.5\ \underline{v}\ \right] \\ &= \left[\ \underline{u} \mid \underline{v}\ \right] \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Posto

$$P = \left[\ \underline{u} \mid \underline{v}\ \right], \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0.5 \end{bmatrix},$$

possiamo riscrivere la relazione trovata come

$$AP = PD.$$

Ora, capita che la matrice

$$P = \left[\ \underline{u} \mid \underline{v}\ \right] = \left[\begin{array}{r|r} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{array}\right]$$

possiede inversa. Dunque possiamo ricavare A in funzione di P e D :

$$A = PDP^{-1}.$$

Possiamo allora ricondurre il calcolo delle potenze di A al calcolo delle potenze di D :

$$\begin{aligned} A &= PDP^{-1} \\ A^2 &= PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} \\ A^3 &= PDP^{-1}PD^2P^{-1} = PD^3P^{-1} \\ &\vdots \\ A^t &= PDP^{-1}PD^{t-1}P^{-1} = PD^tP^{-1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

4. In generale, data una matrice A quadrata di ordine n, possiamo cercare delle colonne sulle quali A agisce in modo particolarmente semplice ...

   Definizione *Se la matrice A agisce su una colonna non nulla $\underline{v} \in R^{n\times 1}$ come la moltiplicazione per un numero reale λ*

   $$A\underline{v} = \lambda\underline{v},$$

   allora si dice che $\underline{v} \in R^{n\times 1}$ e' un autovettore di A e che λ e' un autovalore di A.

   Se la matrice A possiede n autovettori [1] $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$, con rispettivi autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, cioe'

   $$A\underline{v}_1 = \lambda_1\underline{v}_1, \quad A\underline{v}_2 = \lambda_2\underline{v}_2, \quad \dots \quad A\underline{v}_n = \lambda_n\underline{v}_n,$$

   allora si ha

   $$\begin{aligned} A\left[\ \underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \dots \quad \underline{v}_n\ \right] &= \left[\ A\underline{v}_1 \mid A\underline{v}_2 \mid \dots \quad A\underline{v}_n\ \right] \\ &= \left[\ \lambda_1\underline{v}_1 \mid \lambda_2\underline{v}_2 \mid \dots \quad \lambda_n\underline{v}_n\ \right] \\ &= \left[\ \underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \dots \quad \underline{v}_n\ \right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

   Indichiamo con P

   $$P = \left[\ \underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \dots \quad \underline{v}_n\ \right]$$

   la matrice avente come colonne gli n autovettori $\underline{v}_i$, ed indichiamo con D

   $$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

   la matrice diagonale con elementi diagonali i corrispondenti autovalori λ_i.

   Cosi' possiamo riscrivere la relazione trovata come

   $$AP = PD.$$

[1] potrebbe non possederne alcuno.

Se capita che la matrice

$$P = \left[\ \underline{v}_1 \ \middle| \ \underline{v}_2 \ \middle| \ \ldots \quad \underline{v}_n \ \right]$$

avente come colonne gli n autovettori possiede inversa, [2] allora possiamo ricavare A in funzione di P e D :

$$A = PDP^{-1}.$$

Possiamo allora ricondurre il calcolo delle potenze di A al calcolo delle potenze di D :

$$A^t = PD^tP^{-1}.$$

[2]potrebbe non esistere alcuna matrice invertibile con colonne autovettori.