Algebra/ Algebra Lineare, 02.03.07

1. Sappiamo che l'inverso di un numero reale $a \neq 0$ e' l'unico numero reale b che moltiplicato a destra (o sinistra) per a da' per risultato il numero reale uno:
$$ab = (ba) = 1;$$
l'inverso di a viene indicato con a^{-1}. Mostriamo ora in che forma cio' si estende alle matrici.

   Definizione *Sia A una matrice di tipo $m \times n$, e sia B una matrice di tipo $n \times m$; diciamo che*

   - *B e' un'inversa destra di A se $AB = I_m$;*
   - *B e' un'inversa sinistra di A se $BA = I_n$;*
   - *B e' un'inversa di A se $AB = I_m$ e $BA = I_n$.*

   Se una matrice A di tipo $m \times n$ possiede sia una inversa destra B che una inversa sinistra C, allora esse coincidono;
$$B = I_n B = (CA)B = C(AB) = CI_m = C.$$
Dunque se A possiede un'inversa, questa e' unica; essa viene detta *la* matrice inversa di A, e viene denotata con
$$A^{-1}.$$

2. **Esempio.** Chiedersi se la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
possiede una inversa destra significa chiedersi se esiste una matrice
$$B = \begin{bmatrix} p & q \end{bmatrix}$$
tale che $AB = I_2$, cioe'
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
o

$$\begin{bmatrix} p & q \\ 2p & 2q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ora, si dovrebbe avere $p = 1$ e $2p = 0$, e cio' e' impossibile.

Dunque A non possiede alcuna inversa.

Esempio. Chiedersi se la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

possiede una inversa destra significa chedersi se esiste una matrice

$$B = \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$$

tale che $AB = I_2$, cioe'

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le due colonne di B saranno soluzioni dei due sistemi lineari

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

cioe'

$$\begin{cases} p + 2q = 1 \\ 3p + 4q = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} r + 2s = 0 \\ 3r + 4s = 1 \end{cases}$$

Ora, entrambi i sistemi sono determinati, con soluzione rispettive

$$\begin{matrix} p = -2 & \qquad r = 1 \\ q = 1.5 & \qquad s = -0.5 \end{matrix}$$

Abbiamo cosi' che

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

e' un'inversa destra di A.

Poiche'

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2,$$

B e' anche un'inversa sinistra di A.

Dunque B e' l'inversa di A.

Esempio. Chiedersi se la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

possiede una inversa destra significa chedersi se esiste una matrice

$$B = \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$$

tale che $AB = I_2$, cioe'

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le due colonne di B saranno soluzioni dei due sistemi lineari

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

che sono entrambi impossibili.

Dunque A non possiede alcuna inversa.

3. **Teorema 1** *Se una matrice A di tipo $m \times n$ possiede inversa, allora ciascun sistema lineare di m equazioni in n incognite*

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

con matrice dei coefficienti A e' determinato; inoltre, la sua unica soluzione e' data da

$$\underline{x} = A^{-1}\underline{b}.$$

Corollario 1 *Se una matrice A di tipo $m \times n$ che possiede inversa, allora $m = n$, cioe' A e' quadrata, ed A e' non singolare. Inoltre, l'algoritmo di Gauss trasforma A in una matrice triangolare superiore non degenere.*

Dimostrazione del Teorema. Usando il fatto che A^{-1} sia inversa sinistra di A, ricaviamo

$$\begin{aligned} A\underline{x} &= \underline{b} \\ A^{-1}(A\underline{x}) &= A^{-1}\underline{b} \\ \left(A^{-1}A\right)\underline{x} &= A^{-1}\underline{b} \\ I_n\underline{x} &= A^{-1}\underline{b} \\ \underline{x} &= A^{-1}\underline{b} \end{aligned}$$

.

Usando il fatto che A^{-1} sia inversa destra di A, mostriamo che questa e' davvero una soluzione:

$$A\left(A^{-1}\underline{b}\right) = \left(AA^{-1}\right)\underline{b} = I_m\underline{b} = \underline{b}.$$

cvd

Illustrazione.

Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = b_1 \\ 3x_1 + 4x_2 = b_2 \end{cases},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

dove b_1, b_2 sono termini noti arbitrari.

Sapendo che la matrice dei coefficienti

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$

possiede inversa

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix},$

si ha che il sistema lineare in questione e' determinato, ed ha come unica soluzione

$$\underline{x} = A^{-1}\underline{b} :$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} x_1 = -2b_1 + b_2 \\ x_2 = 1.5b_1 - 0.5b_2 \end{array}.$$

4. **Teorema 2** *Se una matrice quadrata A e' non singolare, allora A e' invertibile.*

   Dimostrazione. Sia A quadrata di tipo $n \times n$. Dobbiamo innanzitutto provare che A possiede un'inversa destra; siamo cosi' condotti a considerare l'equazione matriciale

$$AX = I_n,$$

nella matrice incognita X, anch'essa quadrata di tipo $n \times n$.

Ora, questa equazione matriciale equivale agli n sistemi lineari

$$A\ X(:,h) = I_n(:,h), \qquad h = 1, \ldots, n,$$

ciascuno avente come matrice dei coefficienti la matrice A, come colonna delle incognite una colonna della matrice incognita X e come colonna dei termini noti la corrispondente colonna della matrice unita' I_n.

Essendo A non singolare, ciascuno di questi sistemi ammette una (ed una sola) souzione; esistono cioe' n colonne $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \ldots, \underline{s}_n$ tali che

$$A\underline{s}_h = I_n(:,h), \qquad h = 1, \ldots, n.$$

Allora la matrice

$$S = [\underline{s}_1\ \underline{s}_2\ \ldots \underline{s}_n]$$

e' una soluzione dell'equazione matriciale di partenza:

$$AS = I_n,$$

cioe' e' un'inversa destra della matrice A.

I calcoli necessari per la determinazione di S possono essere convenientemente svolti sulla matrice

$$\left[\ A \mid I_n\ \right]$$

ottenuta affiancando la matrice A e la matrice unita' I_n.

Non proviamo che A possiede anche inversa sinistra.

cvd

Dalla dimostrazione di questo teorema possiamo dedurre anche il seguente

Algoritmo di Gauss-Jordan per il calcolo della matrice inversa. Sia A una matrice quadrata di tipo $n \times n$. Se la matrice

$$\left[\ A \mid I_n\ \right]$$

ottenuta da A affiancando a destra la matrice I_n unita' di ordine n, si puo' trasformare, mediante operazioni elementari per righe, in una matrice

$$\left[\begin{array}{c|c} I_n & B \end{array}\right]$$

avente a sinistra la matrice I_n, allora A possiede come inversa la matrice che compare a destra:

$$B = A^{-1}.$$

Illustrazione Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Affiancando ad A la matrice unita' I_3 otteniamo:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Operando con le operazioni elementari per righe dettate dall'algoritmo di Gauss, otteniamo

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Osserviamo che, in particolare, abbiamo trasformato la matrice A in una matrice triangolare superiore non degenere, dunque possiamo affermare che A possiede inversa.

Possiamo proseguire e trasformare il blocco di sinistra nelle matrice unita', ottenendo

$$\left[\begin{array}{c|c} I_3 & B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Dunque A possiede inversa

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$