Algebra/ Algebra Lineare; 05.03.07 - seconda parte

1. Cosiderata la generica matrice A quadrata di ordine n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

ci chiediamo sotto quali condizioni sui parametri a_{ij} succede che A e' non singolare o, equivalentemente, che A e' invertibile.

2. Ad esempio, per $n = 2$, possiamo considerare la generica matrice quadrata del secondo ordine

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

e chiederci sotto quali condizioni sui parametri a, b, c, d succede che A e' non singolare, cioe' succede che tutti i sistemi lineari che ammettono A come matrice dei coefficienti

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

sono determinati.

Osserviamo che possiamo combinare linearmente le due equazioni in modo da ottenere una nuova equazione che non contenga l'incognita y :

$$\begin{aligned} d(ax + by) - b(cx + dy) &= dp - bq \\ (da - bc)x &= dp - bq, \end{aligned}$$

e possiamo combinare linearmente le due equazioni in modo da ottenere una nuova equazione che non contenga l'incognita x :

$$
\begin{aligned}
c(ax+by)-a(cx+dy) &= cp-aq \\
(cb-ad)y &= cp-aq.
\end{aligned}
$$

Osserviamo che, sotto la condizione

$$ad - bc \neq 0,$$

possiamo ricavare univocamente sia l'incognita x che l'incognita y :

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{dp-bq}{ad-bc} \\
y &= \frac{aq-cp}{ad-bc}.
\end{aligned}
$$

Si verifica che questa e' davvero una soluzione.

3. Definiamo il determinante $DetA$ della generica matrice A quadrata del secondo ordine ponendo:

$$DetA = Det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

Possiamo allora riformulare cio' che abbiamo provato nel punto precedente dicendo che, per ogni matrice A quadrata del secondo ordine,

- *se $DetA \neq 0$, allora A e' non singolare.*

4. **Proposizione.** *Il determinante della matrice prodotto AB di due matrici A, B e' il prodotto dei determinanti delle matrici fattori:*

$$Det(AB) = DetA \; DetB.$$

Verifica Consideriamo due generiche matrici del secondo ordine

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}.$$

e calcoliamo il determinante della matrice loro prodotto

$$AB = \left[\begin{array}{cc} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{array} \right].$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}
Det(AB) &= (ap+br)(cq+ds)-(aq+bs)(cp+dr) \\
&= acpq+adps+bcqr+bdrs-acpq-adqr-bcps-bdrs \\
&= adps+bcqr-adqr-bcps \\
&= ad(ps-qr)-bc(ps-qr) \\
&= (ad-bc)(ps-qr) \\
&= DetADetB.
\end{aligned}$$

5. Possiamo ora affermare che, per ogni matrice A quadrata del secondo ordine,

   - *se A e' invertibile, allora $DetA \neq 0$.*

   Infatti, se la matrice A possiede inversa, allora si ha

   $$Det(A)Det(A^{-1}) = Det(AA^{-1}) = Det(I_2) = Det \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] = 1,$$

   e cio' implica $DetA \neq 0$.

6. Da quanto visto nei punti precedenti segue che, per ogni matrice A quadrata del secondo ordine, le tre proposizioni

   - *A e' non singolare;*
   - *A e' invertibile;*
   - *$DetA \neq 0$*

   sono equivalenti.