**Algebra/ Algebra Lineare; 07.03.07**

1. D'ora innanzi, invece di "matrice quadrata di tipo $n \times n$" diremo "matrice quadrata di ordine $n$", o anche "matrice di ordine $n$."

   Definiamo il determinante di una matrice quadrata di un qualsiasi ordine $n$ in modo ricorsivo. Per $n = 1$, definiamo il determinate $DetA$ di una matrice $A = [a]$ di ordine 1 come il suo unico elemento:

   $$Det[a] = a.$$

   Sia ora $n > 1$. Supponiamo di avere definito il determinante per una qualsiasi matrice di ordine $n-1$, e ci accingiamo a definire il determinante per una qualsiasi matrice di ordine $n$.

   Introduciamo innanzitutto alcuni termini e alcune notazioni.

   Sia $A$ la generica matrice di ordine $n$. Per ciascuna scelta di un indice di riga

   $i = 1, \ldots, n$

   e di un indice di colonna

   $j = 1, \ldots, n,$

   consideriamo due numeri reali.

   - Intersechiamo la riga $i-$ma e la colonna $j-$ma di $A$

     $$\begin{array}{cccccc} & & & & j & \\ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ i & \circ & \circ & \circ & \bullet & \circ \\ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{array},$$

     ed otteniamo un numero reale, l'elemento

     $$a_{ij}$$

     di posto $(i, j)$ in $A$.

- Eliminiamo la riga $i-$ma e la colonna $j-$ma di $A$

$$\begin{array}{cccccc} & & & & j & \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \circ & \bullet \\ i & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \circ & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \circ & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \circ & \bullet \end{array},$$

  ottenendo cosi' una matrice quadrata di ordine $n-1$, per la quale abbiamo supposto definito il determinante. Prendiamo questo determinante col suo segno o segno opposto, secondoche la somma $i+j$ sia pari o dispari; otteniamo cosi' un numero reale, il *complemento algebrico*

$$A_{ij}$$

  di posto $(i, j)$ della atrice $A$.

Ora definiamo il determinante della matrice $A$ come il numero reale

$$Det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

ottenuto sommando i prodotti degli elementi della prima riga di $A$ per i rispettivi complementi algebrici; oppure come il numero reale

$$Det(A) = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \cdots + a_{2n}A_{2n}$$

ottenuto sommando i prodotti degli elementi della seconda riga di $A$ per i rispettivi complementi algebrici: ... oppure come il numero reale

$$Det(A) = a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \cdots + a_{nn}A_{nn}.$$

ottenuto sommando i prodotti degli elementi dell'ultima riga di $A$ per i rispettivi complementi algebrici: Queste espressioni vengono dette *sviluppi di Laplace del determinante di A secondo la prima, seconda, ..., ultima riga.*

Il determinante di $A$ puo' anche essere definito mediante sviluppi di Laplace per colonne.

Il fatto che tutte queste espressioni diano lo stesso risultato non e' per niente banale.

2. Consideriamo la generica matrice quadrata del secondo ordine

$$A = \left[ \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right].$$

I suoi complementi algebrici sono:

$$\begin{array}{ll} A_{11} = a_{22} & A_{12} = -a_{21} \\ A_{21} = -a_{12} & A_{22} = a_{11} \end{array} .$$

Gli sviluppi di Laplace del determinante di $A$ secondo la prima riga e la seconda riga sono

$$\begin{aligned} Det(A) &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \\ Det(A) &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} = -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11}. \end{aligned}$$

Riotteniamo cosi' il determinante di una matrice del secondo ordine come definito nella lezione precedente.

3. Consideriamo la matrice quadrata del terzo ordine

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 11 \end{bmatrix}.$$

Lo sviluppo di Laplace del determinate di $A$ secondo la prima riga e'

$$\begin{aligned} DetA &= 1 \cdot Det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 11 \end{bmatrix} - 2 \cdot Det \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 11 \end{bmatrix} + 3 \cdot Det \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \\ &= 5 \cdot 11 - 6 \cdot 8 - \quad 2(4 \cdot 11 - 6 \cdot 7) + \quad 3(4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) \\ &= -6 \end{aligned}$$

Lo sviluppo di Laplace del determinate di $A$ secondo la seconda riga e'

$$\begin{aligned} DetA &= -4 \cdot Det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 11 \end{bmatrix} + 5 \cdot Det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 11 \end{bmatrix} - 6 \cdot Det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \\ &= -4(2 \cdot 11 - 3 \cdot 8) + \quad 5(1 \cdot 11 - 3 \cdot 7) - \quad 6(1 \cdot 8 - 2 \cdot 7) \\ &= -6 \end{aligned}$$

4. Consideriamo la generica matrice quadrata del terzo ordine

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Lo sviluppo di Laplace del determinate di $A$ secondo la prima riga e'

$$\begin{aligned} DetA &= a_1 \cdot Det \begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} - a_2 \cdot Det \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{bmatrix} + a_3 \cdot Det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - \quad a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + \quad a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_1c_2. \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto un polinomio omogeneo di terzo grado nei 9 parametri che descrivono la matrice, e in questo polinomio compaiono 6 termini.

Si puo' provare che il determinante di una matrice di ordine $n$ e' un polinomio omogeneo di grado $n$ negli $n^2$ parametri che descrivono la matrice, e in questo polinomio compaiono

$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1$

termini.

5. Possiamo parametrizzare una matrice del secondo ordine con 4 numeri in $R$, ma anche con 2 vettori colonna colonna in $R^{2\times 1}$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a} & \underline{b} \end{bmatrix}.$$

Siamo cosi' condotti a riguardare il determinante di una matrice del secondo ordine come una funzione di due variabili in $R^{2\times 1}$ :

$$DetA = Det \begin{bmatrix} \underline{a} & \underline{b} \end{bmatrix}.$$

In quest'ottica, il determinante del secondo ordine e' caratterizzato dalle seguenti proprieta':

$$Det \begin{bmatrix} r\underline{a} & \underline{b} \end{bmatrix} = rDet \begin{bmatrix} \underline{a} & \underline{b} \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
Det\left[\begin{array}{cc} \underline{a} & r\underline{b} \end{array}\right] &= rDet\left[\begin{array}{cc} \underline{a} & \underline{b} \end{array}\right] \\
Det\left[\begin{array}{cc} \underline{a}+\underline{b} & \underline{c} \end{array}\right] &= Det\left[\begin{array}{cc} \underline{a} & \underline{c} \end{array}\right] + Det\left[\begin{array}{cc} \underline{b} & \underline{c} \end{array}\right] \\
Det\left[\begin{array}{cc} \underline{a} & \underline{b}+\underline{c} \end{array}\right] &= Det\left[\begin{array}{cc} \underline{a} & \underline{b} \end{array}\right] + Det\left[\begin{array}{cc} \underline{a} & \underline{c} \end{array}\right] \\
Det\left[\begin{array}{cc} \underline{a} & \underline{a} \end{array}\right] &= 0 \\
Det\left[\begin{array}{cc} \underline{a} & \underline{b} \end{array}\right] &= -Det\left[\begin{array}{cc} \underline{b} & \underline{a} \end{array}\right] \\
Det\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] &= 1
\end{aligned}
$$

per ogni $a, b, c$ vettori colonna in $R^{2\times 1}$ ed ogni scalare $r$ in $R$.

Ad esempio, la prima proprieta' si puo' verificare cosi':

$$
\begin{aligned}
Det\left[\begin{array}{cc} r\underline{a} & \underline{b} \end{array}\right] &= Det\left[\begin{array}{cc} ra_1 & b_1 \\ ra_2 & b_2 \end{array}\right] \\
&= ra_1b_2 - b_1ra_2 = r\left(a_1b_2 - b_1a_2\right) \\
&= rDet\left[\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array}\right] \\
&= rDet\left[\begin{array}{cc} \underline{a} & \underline{b} \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

La terzultima proprieta' si verica immediatamente:

$$
Det\left[\begin{array}{cc} \underline{a} & \underline{a} \end{array}\right] = Det\left[\begin{array}{cc} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{array}\right] = a_1a_2 - a_1a_2 = 0.
$$

6. Data la generica matrice $A$ del secondo ordine

$$
A = \left[\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ & \\ a_2 & b_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \underline{a} & \underline{b} \end{array}\right],
$$

consideriamo il generico sistema lineare che ammette $A$ come matrice dei coefficienti

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 x_2 = c_1 \\ a_2 x + b_2 x_2 = c_2 \end{cases},$$

che possiamo riscrivere come

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

e sintetizzare nella forma

$$\underline{a} x_1 + \underline{b} x_2 = \underline{c}.$$

Osserviamo che una soluzione del sistema deve essere anche una soluzione dell'equazione

$$Det \begin{bmatrix} \underline{a} x_1 + \underline{b} x_2 & \underline{b} \end{bmatrix} = Det \begin{bmatrix} \underline{c} & \underline{b} \end{bmatrix};$$

Ora, al primo membro si ha

$$\begin{aligned} Det \begin{bmatrix} \underline{a} x_1 + \underline{b} x_2 & \underline{b} \end{bmatrix} &= Det \begin{bmatrix} \underline{a} x_1 & \underline{b} \end{bmatrix} + Det \begin{bmatrix} \underline{b} x_2 & \underline{b} \end{bmatrix} \\ &= x_1 Det \begin{bmatrix} \underline{a} & \underline{b} \end{bmatrix} + x_2 Det \begin{bmatrix} \underline{b} & \underline{b} \end{bmatrix} \\ &= x_1 Det \begin{bmatrix} \underline{a} & \underline{b} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Abbiamo cosi' ottenuto l'equazione nella sola incognita $x_1$

$$x_1 Det \begin{bmatrix} \underline{a} & \underline{b} \end{bmatrix} = Det \begin{bmatrix} \underline{c} & \underline{b} \end{bmatrix},$$

e in modo analogo possiamo ottenere l'equazione nella sola incognita $x_2$

$$x_2 Det \begin{bmatrix} \underline{a} & \underline{b} \end{bmatrix} = Det \begin{bmatrix} \underline{a} & \underline{c} \end{bmatrix}.$$

Se $DetA \neq 0$, allora possiamo ricavare univocamente entrambe le incognite, ed ottenere

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{Det \begin{bmatrix} \underline{c} & \underline{b} \end{bmatrix}}{Det \begin{bmatrix} \underline{a} & \underline{b} \end{bmatrix}} \\ x_2 &= \frac{Det \begin{bmatrix} \underline{a} & \underline{c} \end{bmatrix}}{Det \begin{bmatrix} \underline{a} & \underline{b} \end{bmatrix}}. \end{aligned}$$

Questa e' la *regola di Cramer* per la soluzione dei sistemi del secondo ordine con matrice dei coefficienti non singolare.

7. Per i determinanti del terzo ordine valgono proprieta' analoghe a quelle evidenziate sopra per determinanti del secondo ordine, e si possono usare queste proprieta' per ricavare la *regola di Cramer* per la soluzione del generico sistema lineare del terzo ordine

$$\underline{a}x_1 + \underline{b}x_2 + \underline{c}x_3 = \underline{d}$$

con matrice dei coefficienti nonsingolare:

$$Det \begin{bmatrix} \underline{a} & \underline{b} & \underline{d} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Precisamente, si ha

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{Det \begin{bmatrix} \underline{d} & \underline{b} & \underline{c} \end{bmatrix}}{Det \begin{bmatrix} \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} \end{bmatrix}} \\ x_2 &= \frac{Det \begin{bmatrix} \underline{a} & \underline{d} & \underline{c} \end{bmatrix}}{Det \begin{bmatrix} \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} \end{bmatrix}} \\ x_3 &= \frac{Det \begin{bmatrix} \underline{a} & \underline{b} & \underline{d} \end{bmatrix}}{Det \begin{bmatrix} \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} \end{bmatrix}}. \end{aligned}$$