Algebra/ Algebra Lineare; 09.03.07 (seconda parte)

1. Sia A una matrice quadrata di ordine n. Ricordiamo che un vettore colonna non nullo $\underline{v} \neq \underline{0}$ si dice autovettore di A se A agisce su $\underline{v}$ come la moltiplicazione per uno scalare:

   $$A\underline{v} = \lambda\underline{v}, \qquad \lambda \in R;$$

   lo scalare λ si dice autovalore di A associato all'autovettore $\underline{v}$. Uno scalare si dice autovalore di A se e' l'autovalore associato a qualche autovettore di A.

   Osserviamo che a ciascun autovettore e' associato un solo autovalore. Infatti, se λ e μ sono entrambi autovalori associati ad uno stesso autovettore $\underline{v}$ di A, cioe' se

   $A\underline{v} = \lambda\underline{v}, \qquad A\underline{v} = \mu\underline{v},$

   allora si ha l'uguaglianza

   $\lambda\underline{v} = \mu\underline{v},$

   che si puo' riscrivere nella forma

   $(\lambda - \mu)\underline{v} = \underline{0},$

   che a sua volta, poiche' $\underline{v} \neq \underline{0}$, implica

   $\lambda - \mu = 0, \qquad cioe' \qquad \lambda = \mu.$

2. Riconsideriamo la matrice

   $$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix},$$

   che possiede un autovettore

   $$\underline{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

   con autovalore associato $\lambda = 1$:

   $$A\underline{u} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \underline{u};$$

   e possiede un autovettore

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

con autovalore associato $\lambda = 0.5$:

$$A\underline{v} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 0.5 \cdot \underline{v}.$$

3. Iniziamo a chiederci come si possano ricavare degli autovettori di A cui e' associato l'autovalore $\lambda = 1$. Tali autovettori sono i vettori colonna $\underline{x} \neq \underline{0}$ caratterizzati dalla condizione

   $$A\underline{x} = \underline{x},$$

   che si puo' riscrivere

   $$A\underline{x} - \underline{x} = \underline{0},$$

   o

   $$A\underline{x} - I_2\underline{x} = \underline{0},$$

   o

   $$(A - I_2)\underline{x} = \underline{0}.$$

   Abbiamo cosi' trovato il sistema lineare omogeneo

   $$\begin{bmatrix} -0.2 & 0.3 \\ 0.2 & -0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underline{0},$$

   che si riduce alla sola equazione lineare omogenea

   $$-0.2x_1 + 0.3x_2 = 0.$$

   Ora, le soluzioni di questa equazione sono del tipo

   $$\underline{x} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}p \\ p \end{bmatrix}, \qquad p \in R.$$

   Questi vettori, con $p \neq 0$, sono tutti e soli gli autovettori di A cui e' associato l'autovalore $\lambda = 1$; in particolare, per $p = 2$ ritroviamo l'autovettore $\underline{u}$.

4. Ci chiediamo ora se $\lambda = -1$ e' un autovalore di A. Cerchiamo gli eventuali autovettori di A cui sia associato l'autovalore $\lambda = -1$. Tali autovettori sono i vettori colonna $\underline{x} \neq \underline{0}$ caratterizzati dalla condizione

$A\underline{x} = -\underline{x}$,

che si puo' riscrivere

$A\underline{x} + \underline{x} = \underline{0}$,

o

$A\underline{x} + I_2\underline{x} = \underline{0}$,

o

$(A + I_2)\underline{x} = \underline{0}$.

Abbiamo cosi' trovato il sistema lineare omogeneo

$$\begin{bmatrix} 1.8 & 0.3 \\ 0.2 & 1.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underline{0},$$

che ha solo la soluzione banale $\underline{x} = \underline{0}$. Dunque non c'e' nessun autovettore di A cui sia associato $\lambda = -1$. Concludiamo che $\lambda = -1$ non e' un autovalore di A.

5. Uno scalare λ sara' un autovalore della matrice A se esistono dei vettori colonna $\underline{x} \neq \underline{0}$ che soddisfano la condizione

   $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$,

   che si puo' riscrivere

   $A\underline{x} - \lambda\underline{x} = \underline{0}$,

   o

   $A\underline{x} - \lambda I_2\underline{x} = \underline{0}$,

   o

   $(A - \lambda I_2)\underline{x} = \underline{0}$.

   Abbiamo cosi' trovato il sistema lineare omogeneo

   $$\begin{bmatrix} 0.8 - \lambda & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underline{0}.$$

   Ora, questo sistema lineare omogeneo avra' una soluzione non banale $\underline{x} \neq \underline{0}$. se e solo se

$$Det \begin{bmatrix} 0.8-\lambda & 0.3 \\ 0.2 & 0.7-\lambda \end{bmatrix} = 0,$$

cioe' se e solo se λ e' soluzione dell'equazione di secondo grado

$$(0.8-\lambda)(0.7-\lambda) - 0.3 \cdot 0.2 = 0,$$

cioe'

$$\lambda^2 - 1.5\lambda - 0.5 = 0.$$

Ora, le soluzioni di questa equazione sono

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 0.5.$$

Abbiamo cosi' ritrovato i due autovalori della matrice A che sono associati agli autovettori $\underline{u}$ e $\underline{u}$; possiamo inoltre affermare che A non possiede altri autovalori al di fuori di 1 e 0.5.

6. Sia ora A una matrice quadrata di ordine n :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Uno scalare λ sara' un autovalore della matrice A se esistono dei vettori colonna $\underline{x} \neq \underline{0}$ che soddisfano la condizione

$$A\underline{x} = \lambda \underline{x},$$

che si puo' riscrivere

$$A\underline{x} - \lambda \underline{x} = \underline{0},$$

o

$$A\underline{x} - \lambda I_n \underline{x} = \underline{0},$$

o

$$(A - \lambda I_n)\underline{x} = \underline{0}.$$

Abbiamo cosi' trovato il sistema lineare omogeneo di n equazioni in n incognite

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underline{0}.$$

Ora, questo sistema lineare omogeneo avra' una soluzione non banale $\underline{x} \neq \underline{0}$. se e solo se λ e' soluzione dell'equazione

$$Det(A-\lambda I_n) = Det \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Il polinomio che compare al primo membro di questa equazione e' detto *polinomio caratteristico* della matrice A; e' un polinomio di grado n pari all'orine della matrice.

Possiamo dunque infine dire che

- gli autovalori di una matrice A di ordine n sono le radici del polinomio caratteristico di A.