Algebra/ Algebra Lineare; 09.03.07

1. Tutte le matrici considerate in questa lezione sono supposte quadrate. Nel seguito useremo il termine "linea" per indicare una "riga" o una "colonna" di una matrice, e useremo l'espressione "due linee parrallele" per indicare "due righe" o "due colonne".

   Ricordiamo la definizione ricorsiva del determinante di una matrice di un qualsiasi ordine n :

   - per ogni matrice A di ordine 1, poniamo

   $$Det\ A\ =\ unico\ elemento\ di\ A;$$

   - per ogni matrice A di ordine > 1, poniamo

   $$Det\ A\ =\ \begin{array}{l} somma\ dei\ prodotti\ degli \\ elementi\ di\ una\ linea\ di\ A\ per \\ i\ rispettivi\ complementi\ algebrici \end{array};$$

   La scelta della linea e' irrilevante; questo e' un fatto non banale che noi non dimostriamo.

   Per certi tipi di matrici, la scelta di una opportuna linea puo' semplificare molto l'espansione del determinante. Ad esempio, per la matrice

   $$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix},$$

   scegliendo sempre lo sviluppo rispetto alla prima colonna si ha

   $$Det\ A = 2 \cdot Det \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 0 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} = 2 \cdot 6 \cdot Det \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} = 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 11 = 1188.$$

   In generale, il determinante di una matrice triangolare superiore e' il prodotto dei suoi elementi diagonali:

$$Det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Nei quattro punti seguenti i risultati sui determinanti, dati nelle lezioni precedenti in casi particolari, vengono estesi in tutta la loro generalita', commentati e completati.

2. Sia n un intero positivo arbitrariamenente fissato. La funzione dall'insieme delle matrici di ordine n verso i numeri reali che ad ogni matrice associa il suo determinante gode delle seguenti proprieta':

   - Se A e B sono due matrici, in tutto uguali, tranne che in una linea, e se il vettore che la occupa in A e' r $(\in R)$ volte il vettore che la occupa in B, allora
   $$Det\ A = r\ Det\ B;$$
   - Se A, B, C sono tre matrici, in tutto uguali, tranne che in una linea, e se il vettore che la occupa in A e' la somma dei vettori che la occupano in B e C, allora
   $$Det\ A = Det\ B + Det\ C;$$
   - Se A e' una matrice in cui due linee parallele sono occupate da vettori uguali, allora
   $$Det\ A = 0;$$
   - Se una matrice A e' ottenuta da una matrice B scambiando due linee parallele, allora
   $$Det\ A = -Det\ B.$$
   - Per la matrice unita' I_n si ha
   $$Det\ I_n = 1.$$

   Noi abbiamo verificato queste proprieta' nel caso $n = 2$; la verifica nel caso generale puo' essere svolta per induzione, ma non la svolgiamo.

   Dalle queste proprieta' segue che

   - Se una matrice B e' ottenuta da una matrice A sommando ad una linea un multiplo di una linea ad essa parallela, allora
   $$Det\ A = Det\ B.$$

Lo verifichiamo, per le righe, nel caso $n = 2$; la verifica nel caso generale non e' tanto diversa.

$$A = \begin{bmatrix} \underline{a}' \\ \underline{b}' \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \underline{a}' \\ \underline{b}' + r\underline{a}' \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} Det\ B &= Det \begin{bmatrix} \underline{a}' \\ \underline{b}' + r\underline{a}' \end{bmatrix} \\ &= Det \begin{bmatrix} \underline{a}' \\ \underline{b}' \end{bmatrix} + r Det \begin{bmatrix} \underline{a}' \\ \underline{a}' \end{bmatrix} \\ &= Det \begin{bmatrix} \underline{a}' \\ \underline{b}' \end{bmatrix} = Det\ A. \end{aligned}$$

Grazie a questa proprieta', possiamo calcolare il determinante di una matrice numerica A trasformandola, mediante l'algoritmo di Gauss, in una matrice triangolare superiore B, e poi prendendo il prodotto degli elementi diagonali di B, eventualmente cambiato di segno se si sono usati scambi di riga.

Ad esempio:

$$Det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 11 \end{bmatrix} = Det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -10 \end{bmatrix} = Det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = -6.$$

3. **Regola di Cramer** Sia A una matrice quadrata di ordine n. Se $DetA \neq 0$, allora A e' nonsingolare: tutti i sistemi lineari

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

con matrice dei coefficienti A sono determinati; inoltre

$$x_i = \frac{Det\ A_i}{Det\ A}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

dove A_i e' la matrice ottenuta da A sostituendo la colonna $i-$ma con la colonna $\underline{b}$ dei termini noti.

La regola di Cramer segue dalle proprieta' dei determinanti nel caso n arbitrario sostanzialmente lungo le stesse linee del caso $n = 2$ in precedenza considerato.

4. **Teorema di Binet** Per ogni due matrici A e B quadrate dello stesso ordine, si ha
$$Det\ (AB) = DetA\ DetB.$$

   Abbiamo provato questo teorema nel caso $n = 2$, ma la dimostrazione in questo caso particolare non da' l'idea di una dimostrazione nel caso generale.

   Dal teorema di Binet segue che:

   - Se A e' una matrice quadrata invertibile, allora $Det\ A \neq 0$.

5. Dai due punti precedenti segue che, per una matrice quadrata A, le seguenti condizioni sono equivalenti:

   - $Det\ A \neq 0$;
   - A e' invertibile;
   - A e' non singolare;
   - il sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ ha solo la soluzione banale;

6. I determinanti permettono di dare una formula per la matrice inversa della generica matrice invertibile di ordine n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad Det\ A \neq 0.$$

   Precisamente, si ha

$$A^{-1} = \frac{1}{Det\ A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

   In particolare, per la generica matrice invertibile di ordine 2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad ad - bc \neq 0,$$

   si ha
$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$