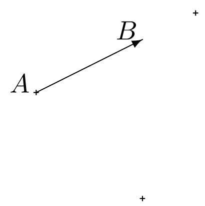
Algebra/ Algebra Lineare; 12.03.07

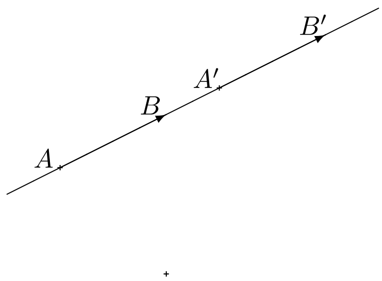
1. **In questa lezione si riprendono, in modo informale e brevemente, alcune nozioni ed alcuni fatti sui vettori, cosi' come emergono nello studio della geometeria dello spazio.**

   Dati due punti A e B nello spazio, indichiamo con AB il segmento che li congiunge, pensato con il verso di percorrenza privilegiato da A verso B.

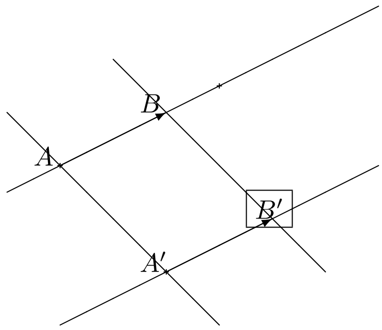
   Fissato un segmento orientato AB, per ogni punto A' dello spazio esiste uno ed un solo segmento orientato $A'B'$ con primo estremo A' che abbia la stessa lunghezza, direzione e verso di AB.



   Se A' e' sulla retta individuata da A e B, allora e' intuitivamente chiaro come possiamo costruire $A'B'$.



Se A' non e' sulla retta individuata da A e B, allora possiamo costruire B' intersecando la retta per A' parallela alla retta per A, B con la retta per B parallela alla retta per A, A'.

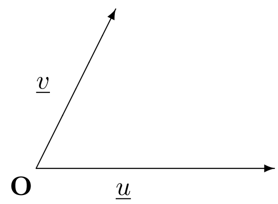


Diciamo che abbiamo "tralsato" il segmento orientato AB nel segmento orientato $A'B'$.

2. **D'ora innanzi, al posto dell'espressione "segmento orientato con primo estremo in A" diremo "vettore applicato in A"; indicheremo i vettori applicati con simboli come $\underline{u}, \underline{v}, \ldots$.**

   Sia O un punto fissato nello spazio.

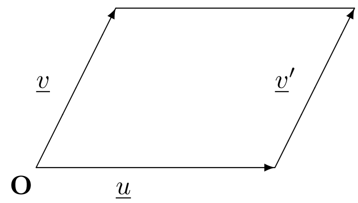
   Dati due vettori $\underline{u}, \underline{v}$ applicati in O,



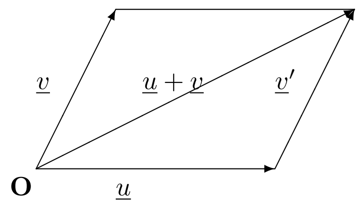
definiamo il vettore

$$\underline{u} + \underline{v}$$

loro somma come il vettore applicato in O costruito come segue: prima trasliamo il vettore $\underline{v}$ in modo che il suo primo estremo coincida col secondo estremo di $\underline{u}$, ottenendo cosi' un nuovo vettore $\underline{v}'$



poi consideriamo il vettore applicato in O avente come secondo estremo il secondo estremo di $\underline{v}'$:

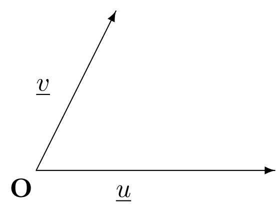


In altri termini, $\underline{u}+\underline{v}$ e' la diagonale, uscente da O, del parallelogramma che ammette $\underline{u}$ e $\underline{v}$ come lati consecutivi.

Nel caso di vettori allineati, la somma e' sostanzialmente quella dei numeri reali:

Questa operazione di addizione di vettori risulta essere associativa e commutativa.

Per esercizio, si considerino tre vettori $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ dei quali i primi due stanno in nel piano del foglio



mentre il terzo ha lunghezza doppia del primo ed esce perpendicolarmente dal foglio verso il lettore, e si verifichi che le due costruzioni

$(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w},$

$\underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}),$

portano allo stesso risultato.

Il ruolo del numero zero viene svolto dal vettore i cui estremi coincidono con il punto O; questo vettore viene detto vettore nullo, e viene indicato col simbolo

$$\underline{0}.$$

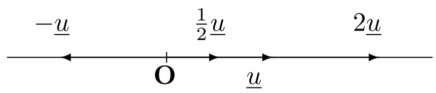
La somma di un qualsiasi vettore col vettore suo simmetrico rispetto ad O ha per risultato il vettore nullo; cosi', per ogni $\underline{v}$, il suo simmetrico rispetto ad 0 viene indicato con

$$-\underline{v}.$$

3. Dato un vettore $\underline{v}$ applicato in O, c'e' un modo naturale per definire il prodotto di un numero reale per $\underline{v}$: per numero intero n, si pone

$$n\underline{v} = \begin{cases} \underline{v} + \quad \underline{v} + \cdots + \quad \underline{v} & n \ volte \quad per \ n = 1, 2, \ldots \\ \underline{0} & \qquad\qquad per \ n = 0 \\ (-\underline{v}) + (-\underline{v}) + \cdots + (-\underline{v}) & -n \ volte \quad per \ n = -1, -2, \ldots \end{cases}$$

... poi si passa, possiamo dire "per suddivisione" , al caso dei numeri razionali, e infine, possiamo dire "per continuita'" ai reali.



4. Abbiamo cosi' definito due operazioni: l'addizione di due vettori applicati in O, che fornisce un vettore applicato in O, e moltiplicazione di un vettori applicato in O per uno scalare reale, che fornisce ancora un vettore applicato in O.

Il calcolo con queste due operazioni gode delle usuali proprieta' del calcolo letterale; bisogna solo tenere presente che abbiamo

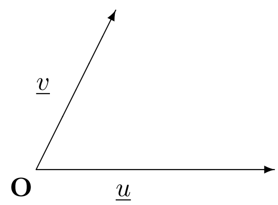
oggetti di due nature, vettori e scalari, possiamo sommare vettori con vettori, moltiplicare vettori per scalari, ma non possiamo sommare vettori con scalari, ne' moltiplicare vettori per vettori.

Data una sequenza di un cero numero di vettori $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots,$ ed una sequenza dello stesso numero di scalari $r_1, r_2, \ldots,$ moltiplicando ciascun vettore per il corrispondente scalare e poi sommando otteniamo un nuovo vettore

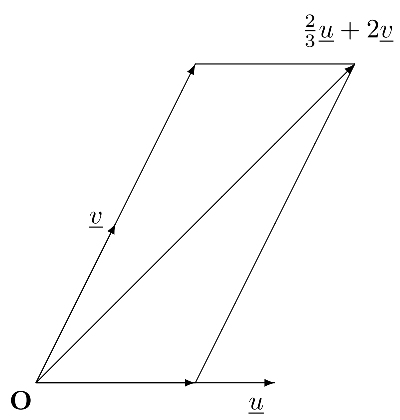
$$r_1\underline{a}_1 + r_2\underline{a}_2 + \cdots,$$

detto *combinazione lineare* **dei vettori dati; il numero reale r_i viene detto il peso del vettore $\underline{a}_i$ nella combinazione lineare.**

5. La combinazione lineare dei vettori $\underline{u}, \underline{v}$ applicati in O



con pesi rispettivi $\frac{2}{3}$ e 2 da' come risultato il vettore



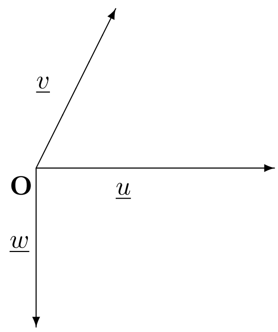
Tutte le combinazioni lineari

$$r\underline{u} + s\underline{v}, \qquad r, s \in R$$

dei due vettori $\underline{u}, \underline{v}$ hanno per risultato un vettore del piano individuato da $\underline{u}, \underline{v}$.

Viceversa, ogni vettore del piano individuato da $\underline{u}, \underline{v}$ si puo' ottenere come combinazione lineare dei vettori $\underline{u}, \underline{v}$.

Per esercizo si determini una stima dei pesi che permettono di ottenere il vettore $\underline{w}$ qui sotto riportato.



In realta', ogni vettore del piano individuato da $\underline{u}, \underline{v}$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei vettori $\underline{u}, \underline{v}$.

6. Consideriamo tre vettori $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$, applicati in O, che non siano contenuti in uno stesso piano. Allora, combinando linearmente questi vettori possiamo ottenere tutti i vettori dello spazio applicati in O.

   Infatti, per ciascun vettore $\underline{b}$ applicato in O,

   - possiamo tracciare dal secondo estremo di $\underline{b}$ la retta parallela alla retta individuata da $\underline{w}$ e intersecarla col piano individuato da $\underline{u}, \underline{v}$, ottenendo un vettore che possiamo esprimere nella forma
   $$r\underline{u} + s\underline{v},$$
   per opportuni scalari r, s;
   - possiamo tracciare dal secondo estremo di $\underline{b}$ il piano parallela al piano individuato da $\underline{u}, \underline{v}$ e intersecarlo con la retta individuata da $\underline{w}$, ottenendo un vettore che possiamo esprimere nella forma
   $$t\underline{w},$$
   per un opportuno scalare t.

Possiamo allora esprimere il vettore $\underline{b}$ nella forma

$$\underline{b} = r\underline{u} + s\underline{v} + t\underline{w}.$$

In realta', ciascun vettore dello spazio si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei vettori $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$.

Diciamo che i vettori $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ formano una *base* **dello spazio, e diciamo che r, s, t sono le** *coordinate* **del vettore $\underline{b}$ rispetto al questa base.**

Associando a ciascun vettore $\underline{b}$ la terna delle sue coordinate

$$\underline{b} \mapsto \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix},$$

otteniamo una corrispondenza biunivoca fra vettori applicati in O e terne di numeri reali, che e' compatibile con le operazioni di addizione e moltiplicazione per scalari definite da uun lato "geometricamente" e dall'atro "algebricamente", nel senso che, se

$$\underline{b}_1 \mapsto \begin{bmatrix} r_1 \\ s_1 \\ t_1 \end{bmatrix}, \qquad \underline{b}_2 \mapsto \begin{bmatrix} r_2 \\ s_2 \\ t_2 \end{bmatrix},$$

allora

$$\underline{b}_1 + \underline{b}_2 \mapsto \begin{bmatrix} r_1 \\ s_1 \\ t_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_2 \\ s_2 \\ t_2 \end{bmatrix},$$

e, per ogni scalare r,

$$r\underline{b}_1 \mapsto r \begin{bmatrix} r_1 \\ s_1 \\ t_1 \end{bmatrix}.$$

7. Dati due vettori $\underline{u}, \underline{v}$, osserviamo che:

- **se $\underline{u}, \underline{v}$ non sono allineati, allora c'e' una sola loro combinazione lineare**

  $$r\underline{u} + s\underline{v} = \underline{0}$$

  che ha per risultato il vettore nullo, quella in cui entrambi i pesi r, s sono nulli.

- **se $\underline{u}, \underline{v}$ stanno su una retta, allora si hanno vari casi:**
  $\underline{u} = \underline{0}$
  $\underline{v} = \underline{0}$
  $\underline{u}, \underline{v} \neq \underline{0}, \qquad \underline{u} = p\underline{v}, \quad \underline{v} = q\underline{u}, \quad p, q \neq 0.$
  In ciascuno di questi casi c'e' una loro combinazione lineare
  $$r\underline{u} + s\underline{v} = \underline{0}$$
  che ha per risultato il vettore nullo, nella quale almeno un peso r, s non e' nullo. Precisamente, nei tre casi sopra esposti si hanno le seguenti combinazioni lineari:
  $1\ \underline{u} + 0\ \underline{v} = \underline{0}$
  $0\ \underline{u} + 1\ \underline{v} = \underline{0}$
  $1\ \underline{u} - p\ \underline{v} = \underline{0}.$

In definitiva, i vettori $\underline{u}, \underline{v}$ non sono allineati se e solo se c'e' una sola loro combinazione lineare

$$r\underline{u} + s\underline{v} = \underline{0}$$

che ha per risultato il vettore nullo, quella in cui entrambi i pesi r, s sono nulli.

In modo analogo si verifica che tre vettori $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$, non sono complanari se e solo se c'e' una sola loro combinazione lineare

$$r\underline{u} + s\underline{v} + t\underline{w} = \underline{0}$$

che ha per risultato il vettore nullo, quella in cui tutti e tre i pesi r, s, t sono nulli.

8. **Diciamo che un numero finito di vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_p$ sono linearmente indipendenti se c'e' una sola loro combinazione lineare**

$$r_1\underline{v}_1 + r_2\underline{v}_2 + \cdots + r_p\underline{v}_p = \underline{0}$$

che ha per risultato il vettore nullo, quella in cui tutti i pesi $r_1, r_2, \ldots, r_p$ sono nulli.

In caso contrario, diciamo che i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_p$ sono linearmente dipendenti.

Nello spazio si verifica che:

- **esistono tre vettori linearmente indipendenti;**
- **se tre vettori sono linearmente indipendenti, allora formano una base;**
- **quattro o piu' vettori sono sempre linearmente dipendenti.**