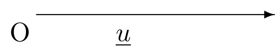
Algebra/ Algebra Lineare; 14.03.07

1. Fissato nello spazio un punto O, abbiamo considerato i vettori applicati in O, ed abbiamo defnito geometricamente l'addizione di due vettori applicati in O e la moltiplicazione di un vettore applicato in O per uno scalare reale.

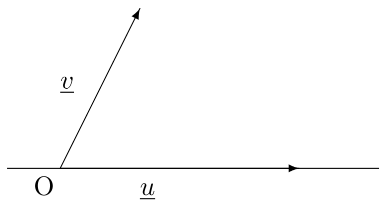
   Abbiamo descritto alcuni fatti ed introdotto alcuni concetti, fra i quali evidenziamo i seguenti.

   - Dati tre vettori applicati in O, non complanari, abbiamo osservato che ciascun vettore dello spazio applicato in O si puo' ottenere in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei tre vettori dati. Abbiamo usato questo fatto per rappresentare i vettori dello spazio applicati in O con terne di numeri reali.
   - Abbiamo introdotto l'espressione "base dello spazio" per indicare un insieme di vettori applicati in O tali che ciascun vettore dello spazio applicato in O si possa ottenere in uno ed un solo modo come loro combinazione lineare.
   - Abbiamo osservato che: due vettori applicati in O non sono allineati se e solo se il vettore nullo si puo' ottenere come loro combinazione lineare soltanto assegnando ad entrambi peso nullo; tre vettori applicati in O non sono complanari se e solo se il vettore nullo si puo' ottenere come loro combinazione lineare soltanto assegnando a tutti e tre peso nullo.
   - Abbiamo introdotto l'espressione "vettori linearmente indipendenti" per indicare dei vettori applicati in O tali che il vettore nullo si possa ottenere come loro combinazione lineare soltanto assegnando a ciascuno di essi peso nullo.

   Osserviamo che abbiamo un'ampia liberta' per costruire una base dello spazio: possiamo prima scegliere un qualsiasi vettore $\underline{u}$ applicato in O, non nullo,



poi possiamo scegliere un qualsiasi vettore $\underline{v}$ applicato in O, non allineato con $\underline{u}$,



e infine possiamo scegliere un qualsiasi vettore $\underline{w}$ applicato in O, non complanare con $\underline{u}, \underline{v}$; ... possiamo immaginare che $\underline{w}$ esca dal piano del foglio.

2. D'ora innanzi useremo l'espressione *spazio vettoriale* R^n per indicare l'insieme R^n dei vettori ad n componenti reali, con le usuali operazioni di somma e moltiplicazione per scalari, definite componente per componente.

   Definizione *Diciamo che i vettori* $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m \in R^n$ *formano una base dello spazio vettoriale* R^n *se ogni vettore* $\underline{b}$ *di* R^n *si puo' scrivere in uno ed un solo modo come loro combinazione lineare*

   $$\underline{b} = \underline{v}_1\ r_1 + \underline{v}_2\ r_2 + \cdots + \underline{v}_n\ r_m,$$

   e diciamo che i pesi $r_1, r_2, \dots, r_m$ *sono le coordinate di* $\underline{b}$ *rispetto a questa base.*

   Esempio. Dato un qualsiasi vettore

   $$\underline{b} = \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} \in R^3,$$

possiamo effettuare la seguente scomposizione

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t, \end{aligned}$$

arrivando cosi' ad esprimere questo vettore come combinazione lineare

$$\underline{b} = \underline{e}_1 r + \underline{e}_2 s + \underline{e}_3 t$$

dei vettori

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

osserviamo che questa scrittura e' univocamente determinata dal vettore $\underline{b}$, in quanto i pesi sono proprio le sue tre componenti.

Abbiamo dunque che i vettori

$\underline{e}_1,\ \underline{e}_2,\ \underline{e}_3$

formano una base dello spazio vettoriale R^3.

In generale, si ha che gli n vettori

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \dots \qquad \underline{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

formano una base, detta *base canonica*, dello spazio vettoriale R^n.

3. **Definizione** *Diciamo che i vettori* $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in R^n$ *sono linearmente indipendenti se l'uguaglianza*

$$\underline{0} = \underline{v}_1\ r_1 + \cdots + \underline{v}_m\ r_m$$

e' soddisfatta solo per $r_1 = \ldots = r_m = 0$*. In caso contrario, cioe' se se esistono* $r_1^*, \dots, r_m^* \in R$ *non tutti nulli tali che valga l'uguaglianza*

$$\underline{0} = \underline{v}_1 \, r_1^* + \cdots + \underline{v}_m \, r_m^*,$$

diciamo che i vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m$ *sono linearmente dipendenti.*

Osserviamo che, se i vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m \in R^n$ formano una base di R^n, allora questi vettori sono linearmente indipendenti.

4. **Esempi.**

- Il vettore

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

e' linearmente indipendente, in quanto l'uguaglianza

$$\underline{a} \; r = \underline{0}, \qquad cioe' \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e' soddisfatta solo per $r = 0$.

- I vettori

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

sono linearmente dipendenti, in quanto vale l'uguaglianza

$$\underline{a} \; 2 + \underline{b} \; (-1) = \underline{0}, \qquad cioe' \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} 2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} (-1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Per decidere se i vettori

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

sono linearmente indipendenti o dipendenti dobbiamo considerare l'uguaglianza

$$\underline{a} \; r + \underline{c} \; s = \underline{0}, \qquad cioe' \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$cioe' \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ora, si verifica che quest'ultimo sistema lineare omogeneo ha solo la soluzione $r = s = 0$, dunque i vettori $\underline{a}, \underline{c}$ sono linermente indipendenti.

- Per decidere se i vettori

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \underline{d} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

sono linearmente indipendenti o dipendenti dobbiamo considerare l'uguaglianza

$$\underline{a}\; r + \underline{c}\; s + \underline{d}\; t = \underline{0}, \qquad cioe' \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$cioe' \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ora, si verifica che quest'ultimo sistema lineare omogeneo ha infinite soluzioni, del tipo
$r = p, \quad s = -2p, \quad t = p,$
dove p e' un parametro libero; in particolare, si ha la soluzione
$r = 1, \quad s = -2, \quad t = 1.$
Cosi', vale l'uguaglianza

$$\underline{a}\; + \underline{c}\; (-2) + \underline{d}\; = \underline{0}, \qquad cioe' \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} (-2) + \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e dunque i vettori $\underline{a}, \underline{c}, \underline{d}$ sono linermente dipendenti.

- Per decidere se i vettori

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \underline{e} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 11 \end{bmatrix}$$

sono linearmente indipendenti o dipendenti dobbiamo considerare l'uguaglianza

$$\underline{a}\; r + \underline{c}\; s + \underline{e}\; t = \underline{0}, \qquad cioe' \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 11 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$cioe' \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ora, si verifica che quest'ultimo sistema lineare omogeneo ha solo la soluzione
$r = s = t = 0,$
e dunque i vettori $\underline{a}, \underline{c}, \underline{e}$ sono linermente indipendenti.

- Per decidere se i vettori

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \underline{e} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad \underline{f} = \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix}$$

sono linearmente indipendenti o dipendenti dobbiamo considerare l'uguaglianza

$$\underline{a}\ r + \underline{c}\ s + \underline{e}\ t + \underline{f}\ z = \underline{0}, \qquad cioe' \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 11 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$cioe' \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 12 \\ 2 & 5 & 8 & 13 \\ 3 & 6 & 11 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ora, quest'ultimo sistema lineare omogeneo ha meno equazioni che incognite, dunque ha infinite soluzioni, e in particolare ha una soluzione $r = r^*, s = s^*, t = t^*, z = z^*$ diversa dalla soluzione $r = s = t = z = 0$.
Concludiamo che i vettori $\underline{a}, \underline{c}, \underline{e}, \underline{f}$ sono linermente dipendenti.

5. Descriviamo ora una procedura ideale che porta ad ottenere un insieme il piu' grande possibile di vettori linearmente indipendenti, e proviamo che questo insieme risulta essere una base dello spazio vettoriale in cui e' contenuto.

   Ci avvarremo ripetutamente della seguente

   Proposizione *Siano dati dei vettori $\underline{u}, \ldots, \underline{v} \in R^n$ linearmente indipendenti, ed un vettore $\underline{w} \in R^n$. Allora i vettori $\underline{u}, \ldots, \underline{v}, \underline{w}$ sono linearmente dipendenti se e solo se il vettore $\underline{w}$ si possa scrivere come combinazione lineare dei vettori $\underline{u}, \ldots, \underline{v}$.*

   Dimostrazione.
   Supponiamo che il vettore $\underline{w}$ si possa scrivere come combinazione lineare

   $\underline{w} = \underline{u}\ r + \cdots + \underline{v}\ s$

   dei vettori $\underline{u}, \ldots, \underline{v}$; allora si ha l'uguaglianza

$\underline{0} = \underline{u}\ r + \cdots + \underline{v}\ s - \underline{w}$

nella quale il peso di $\underline{w}$ e' $-1 \neq 0$, cosi' i vettori $\underline{u}, \ldots, \underline{v}, \underline{w}$ sono linearmente dipendenti.

Supponiamo che i vettori $\underline{u}, \ldots, \underline{v}, \underline{w}$ siano linearmente dipendenti, cioe' che esistano degli scalari $r^*, \ldots, s^*, t^*$ non tutti nulli tali che valga l'uguaglianza

$\underline{0} = \underline{u}\ r^* + \cdots + \underline{v}\ s^* + \underline{w}\ t^*.$

Ora, nel caso in cui $t^* = 0$, varrebbe l'uguaglianza

$\underline{0} = \underline{u}\ r^* + \cdots + \underline{v}\ s^*$

con $r^*, \ldots, s^*$ non tutti nulli, cioe' i vettori $\underline{u}, \ldots, \underline{v}$ sarebbero linearmente dipendenti, contro l'ipotesi.
Dunque deve essere $t^* \neq 0$, e cio' ci permette di ricavare $\underline{w}$ come combinazione lineare

$\underline{w} = -\underline{u}\ \frac{r^*}{t^*} - \cdots - \underline{v}\ \frac{s^*}{t^*}$

dei vettori $\underline{u}, \ldots, \underline{v}$.

Consideriamo il caso $n = 3$, impegnandoci a non usare alcun argomento geometrico, ma solo argomenti algebrici; il caso n qualsiasi non e' significativamente diverso.

- Scegliamo un vettore linearmente indipendente, cioe' un vettore
  $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \neq \underline{0}.$
  Osserviamo che esiste un vettore
  $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in R^3$
  tale che l'uguaglianza
  $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} r = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$
  sia impossibile, cioe' $\underline{v}$ non sia miultiplo scalare di $\underline{u}$.

  Per la proposizione precedente, i vettori $\underline{u}, \underline{v}$ sono linearmente indipendenti.

- Ora osserviamo che la matrice
  $\begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{bmatrix}$

ha piu' righe che colonne, dunque esiste un vettore

$$\underline{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

tale che l'uguaglianza

$$\begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}, \quad cioe' \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} s = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

sia impossibile, cioe' $\underline{w}$ non sia combinazione lineare di $\underline{u}, \underline{v}$.

Per la proposizione precedente, i vettori $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ sono linearmente indipendenti.

- Ora osserviamo che, per ogni vettore

  $$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in R^3,$$

  la matrice

  $$\begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & b_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & b_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

  ha meno righe che colonne, dunque il sistema lineare omogeneo

  $$\begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & b_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & b_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  cioe' l'equazione vettoriale omogenea

  $$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  e' indeterminata, e i vettori $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{b}$ sono linearmente dipendenti.

  Dunque, per la proposizione precedente, il generico vettore $\underline{b} \in R^3$ e' combinazione lineare dei vettori $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$.

Proviamo infine che i vettori $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ sono una base di R^3.

Sappiamo gia' che ogni $\underline{b} \in R^3$ si puo' scrivere in *almeno* un modo come loro combinazione lineare

$$\underline{b} = \underline{u}\, r + \underline{v}\, s + \underline{w}\, t$$

dei vettori $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$.

Resta da provare che per ciascun $\underline{b} \in R^3$ questa scrittura e' unica.

Infatti, date due scritture di $\underline{b}$ come combinazione lineare

$$\begin{aligned} \underline{b} &= \underline{u}\; r_1 + \underline{v}\; s_1 + \underline{w}\; t_1 \\ \underline{b} &= \underline{u}\; r_2 + \underline{v}\; s_2 + \underline{w}\; t_2, \end{aligned}$$

dei vettori $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$, sottraendo membro a membro si ottiene l'uguaglianza

$$\underline{0} = \underline{u}\; (r_1 - r_2) + \underline{v}\; (s_1 - s_2) + \underline{w}\; (t_1 - t_2),$$

dalla quale segue, per l'indipendenza lineare di $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$, che

$r_1 - r_2 = 0, \quad s_1 - s_2 = 0, \quad t_1 - t_2 = 0,$

cioe'

$r_1 = r_2, \quad s_1 = s_2, \quad t_1 = t_2.$

6. Dalla discussione svolta nel punto precedente segue anche che tutte le basi dello spazio vettoriale R^3 sono formate da 3 vettori.

   Infatti: comunque siano dati 2 o meno vettori, esiste un vettore che non e' loro combinazione lineare; comunque siano dati 4 o piu' vettori, questi sono linearmente dipendenti.

   In generale si ha:

   Teorema *Tutte le basi di R^n sono formate da n vettori.*

   Questo fatto viene espresso dicendo che lo spazio vettoriale R^n ha *dimensione n*.