Algebra/ Algebra Lineare - 19.03.07

1. Sia dato un sistema di m equazioni lineari

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

nelle n incognite $x_1, \ldots, x_n$.

Per ciascuna $n-$pla ordinata $\underline{r} = (r_1, \ldots, r_n) \in R^n$, possiamo sostituire alle incognite x_i i corrispondenti numeri r_i, e possiamo considerare gli scarti

$$a_{i1}r_1 + \cdots + a_{in}r_n - b_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

fra primo membro e termine noto nelle varie equazioni.

Possiamo valutare quanto la $n-$pla $\underline{r}$ si discosta dall'essere una soluzione del sistema considerando la somma dei quadrati di questi scarti:

$$\sum_{i=1}^{m} (a_{i1}r_1 + \cdots + a_{in}r_n - b_i)^2 .$$

Una $n-$pla $\underline{r}^* = (r_1^*, \ldots, r_n^*)$ i cui scarti corrispondenti hanno somma dei quadrati minima, cioe' tale che

$$\sum_{i=1}^{m} (a_{i1}r_1^* + \cdots + a_{in}r_n^* - b_i)^2 = \min_{\underline{r} \in R^n} \sum_{i=1}^{m} (a_{i1}r_1 + \cdots + a_{in}r_n - b_i)^2 ,$$

viene detta *soluzione ai minimi quadrati* del sistema lineare dato.

2. Nel formalismo matriciale, il punto precedente si esprime come segue.

Sia dato il sistema lineare

$$A\underline{x} = \underline{b} \qquad A \in R^{m \times n}, \quad \underline{b} \in R^m,$$

nell'incognita $\underline{x} \in R^n$.

Per ciascun vettore $\underline{r} \in R^n$, possiamo sostituire all'incognita $\underline{x}$ il vettore $\underline{r}$, e possiamo considerare il vettore scarto

$$A\underline{r} - \underline{b} \in R^m$$

fra il primo membro e il termine noto.

Possiamo valutare quanto il vettore $\underline{r}$ si discosta dall'essere una soluzione del sistema considerando la norma di questo vettore scarto:

$$\|A\underline{r} - \underline{b}\|.$$

Un vettore $\underline{r}^* \in R^n$ cui corrisponde un vettore scarto di norma minima, cioe' tale che

$$\|A\underline{r}^* - \underline{b}\| = \min_{\underline{r} \in R^n} \|A\underline{r} - \underline{b}\|,$$

viene detto *soluzione ai minimi quadrati* del sistema dato.

Si osservi che questa condizione e' equivalente alla

$$\|A\underline{r}^* - \underline{b}\|^2 = \min_{\underline{r} \in R^n} \|A\underline{r} - \underline{b}\|^2.$$

3. Sia dato un sistema lineare

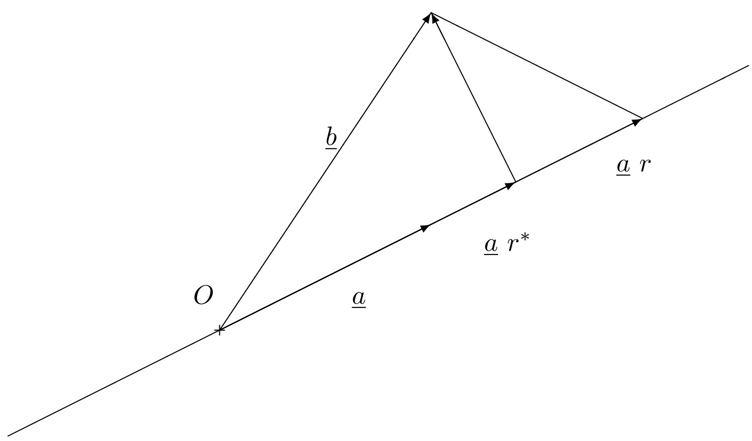
$$\underline{a}\ x = \underline{b} \qquad \underline{a}, \underline{b} \in R^m$$

di m equazioni nella incognita $x \in R$, con $\underline{a} \neq \underline{0}$.

Per ciascun numero $r \in R$, il vettore $\underline{a}\ r$ giace sulla retta individuata dal vettore $\underline{a}$, e il vettore scarto

$$\underline{a}\ r - \underline{b}$$

si puo' pensare come il segmento orientato dal secondo estremo di $\underline{a}\ r$ al secondo estremo di $\underline{b}$.



Cosi' il vettore scarto avra' norma

$$\|\underline{a}\ r - \underline{b}\|$$

minima esattamente quando sara' ortogonale al vettore $\underline{a}$:

$$\begin{array}{lll} \underline{a} \perp (\underline{a}r - \underline{b})\,, & cioe' & \underline{a}'(\underline{a}\; r - \underline{b}) = 0, \\ & cioe' & \underline{a}'\underline{a}\; r - \underline{a}'\underline{b} = 0, \\ & cioe' & \underline{a}'\underline{a}\; r = \underline{a}'\underline{b}. \end{array}$$

Ora, questa e' un'equazione lineare nell'incognta r, il cui coefficiente $\underline{a}'\underline{a}$ e' diverso da zero, e dunque ha una ed una sola soluzione:

$$r^* = \frac{\underline{a}'\underline{b}}{\underline{a}'\underline{a}}.$$

Questo numero reale r^* e' l'unica soluzione ai minimi quadrati del sistema.

4. Consideriamo un sistema lineare di m equazioni nell'incognita x, nel quale tutti i coefficienti valgano 1 :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x & = & b_1 \\ x & = & b_2 \\ & \vdots & \\ x & = & b_m \end{array} \right. \qquad cioe' \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Ad ogni $r \in R$ corrisponde il vettore scarto

$$\underline{a}\; r - \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} r - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r - b_1 \\ r - b_1 \\ \vdots \\ r - b_m \end{bmatrix},$$

la cui norma al quadrato e'

$$\|\underline{a}\; r - \underline{b}\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} r - b_1 \\ r - b_2 \\ \vdots \\ r - b_m \end{bmatrix} \right\|^2 = (r - b_1)^2 + (r - b_2)^2 + \cdots + (r - b_m)^2.$$

Per il punto precedente, possiamo affermare che questa espressione e' minimizzata da uno ed un solo valore:

$$r^* \quad = \quad \frac{\underline{a}'\underline{b}}{\underline{a}'\underline{a}}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_m}{m}$$

Osserviamo che l'unica soluzione ai minimi quadrati del sistema datoi e' la media dei termini noti:

$$r^* = \overline{b}$$

e il quadrato della norma dello scarto corrispondente

$$(r^* - b_1)^2 + (r^* - b_2)^2 + \cdots + (r^* - b_m)^2$$

e' la varianza dei termini noti.

5. **Teorema** *Sia dato un sistema lineare*

$$\underline{a}_1\ x_1 + \cdots + \underline{a}_n\ x_n = \underline{b}, \qquad \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n, \underline{b} \in R^m$$

di m *equazioni nell'incognita* $\underline{x} \in R^n$, *sinteticamente*

$$A\underline{x} = \underline{b} \qquad A \in R^{m \times n},$$

dove gli $\underline{a}_j$ *sono le colonne della matrice* A.

- *Esistono dei vettori* $\underline{r}^* \in R^n$ *il cui scarto e' ortogonale a tutte le colonne di* A,

$$\underline{a}_j \perp (A\ \underline{r}^* - \underline{b}) \qquad \textit{per ogni } j = 1, \ldots, n,$$

  che sono cioe' soluzioni del sistema lineare

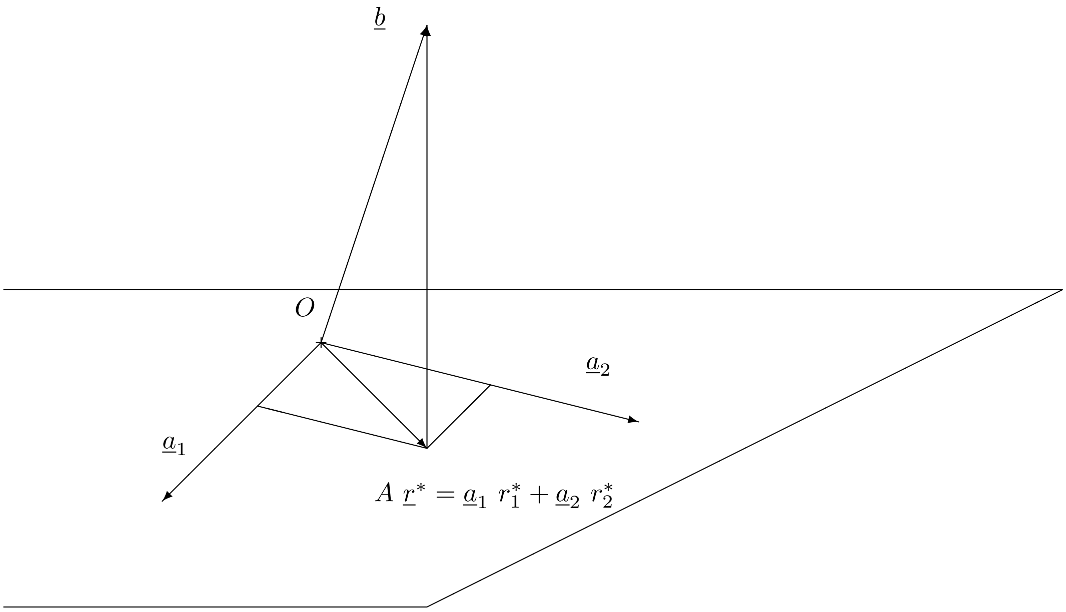
$$A'A\ \underline{r}^* = A'\underline{b}.$$

  Questi vettori $\underline{r}^*$ *sono tutte e sole le soluzioni ai minimi quadrati del sistema.*

- *Se le colonne* $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ *di* A *sono linearmente indipendenti, allora la matrice* $A'A$ *e' invertibile, ed esiste un'unica soluzione ai minimi quadrati:*

$$\underline{r}^* = (A'A)^{-1}\ A'\underline{b}.$$

Caso $n = 2$:



Dimostrazione. Proviamo solo che un vettore $\underline{r}^* \in R^n$ il cui scarto sia ortogonale a tutte le colonne di A,

$$\underline{a}_j \perp (A\ \underline{r}^* - \underline{b}) \qquad \textit{per ogni } j = 1, \ldots, n,$$

e' una soluzione ai minimi quadrati del sistema.
Infatti, per ogni $\underline{r} \in R^n$ si ha

$$\begin{aligned}
\|A\underline{r} - \underline{b}\|^2 &= \|A\underline{r}^* - \underline{b} + A\underline{r} - A\underline{r}^*\|^2 \\
&= \|A\underline{r}^* - \underline{b} + A\,(\underline{r} - \underline{r}^*)\,\|^2 \\
&= \|A\underline{r}^* - \underline{b}\|^2 + \|A\,(\underline{r} - \underline{r}^*)\,\|^2 \\
&\geq \|A\underline{r}^* - \underline{b}\|^2.
\end{aligned}$$

Nel terzo passaggio abbiamo usato il fatto che il vettore scarto $A\ \underline{r}^* - \underline{b}$ corrispondente ad $\underline{r}^*$, essendo ortogonale a tutte le colonne di A, e' ortogonale anche al vettore $A\ (\underline{r} - \underline{r}^*)$, e il teorema di Pitagora.

Notiamo infine che vale l'uguaglianza se e solo se

$$A\,(\underline{r} - \underline{r}^*) = \underline{0}, \qquad cioe' \qquad A\underline{r} = A\underline{r}^*.$$

6. **Esempio.** Consideriamo il sistema lineare

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + 2x_2 & = & 2 \\ x_1 + 4x_2 & = & 4 \\ x_1 + 6x_2 & = & 4 \end{array} \right. \qquad cioe' \qquad \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 4 \end{array} \right]$$

nell' incognita $\underline{x} = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right] \in R^2$.

A ciascun vettore $\underline{r} = \left[\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} \right]$ corrisponde uno scarto

$$A\ \underline{r} - \underline{b} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 4 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} r_1 + 2r_2 - 2 \\ r_1 + 4r_2 - 4 \\ r_1 + 6r_2 - 4 \end{array} \right],$$

il cui quadrato della norma e'

$$\|A\ \underline{r} - \underline{b}\|^2 = \left\| \left[\begin{array}{c} r_1 + 2r_2 - 2 \\ r_1 + 4r_2 - 4 \\ r_1 + 6r_2 - 4 \end{array} \right] \right\|^2 = (r_1 + 2r_2 - 2)^2 + (r_1 + 4r_2 - 4)^2 + (r_1 + 6r_2 - 4)^2.$$

Poiche' le colonne della matrice A dei coefficienti sono linearmente indipendenti, esiste uno ed un solo vettore che minimizza questa espressione, ed e'

$$\begin{array}{rcl} \underline{r}^* & = & (A'A)^{-1}\, A'\underline{b} \\ & = & \left(\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{array} \right] \right)^{-1} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 4 \end{array} \right] \\ & = & \left[\begin{array}{cc} 3 & 12 \\ 12 & 56 \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} 10 \\ 44 \end{array} \right] \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 56 & -12 \\ -12 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 44 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 32 \\ 12 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Lo scarto corrispondente ad $\underline{r}^*$ e'

$$
A\ \underline{r}^* - \underline{b} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},
$$

il cui quadrato della norma vale

$$
\|\underline{a}\ r^* - \underline{b}\|^2 = \left\| \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|^2 = \frac{1}{9}\,(1+4+1) = \frac{2}{3}
$$

Dunque, in particolare, si ha

$$
\frac{2}{3} = \min_{\underline{r}\in R^2} \big((r_1 + 2r_2 - 2)^2 + (r_1 + 4r_2 - 4)^2 + (r_1 + 6r_2 - 4)^2.\big)\,.
$$