Algebra/ Algebra Lineare - 21.03.07

1. **Esercizio 1** *E' data la matrice*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{bmatrix};$$

se ne calcoli l'inversa e si risolvano i sistemi lineari

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 2 \\ 2x & +3y & +4z & = & 4 \\ 4x & +9y & +16z & = & 6 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x & +y & +z & = & 4 \\ 2x & +3y & +4z & = & 6 \\ 4x & +9y & +16z & = & 8 \end{cases}.$$

Svolgimento.

- Indichiamo la matrice data con la lettera A.

  Nel testo dell'esercizio si afferma implicitamente che A e' invertibile (in generale non e' detto che una matrice, anche se quadrata, lo sia).

  Abbiamo due modi per calcolare l'inversa di A : l'algoritmo di Gauss-Jordan, e la formula esplicita.

  L'algoritmo di Gauss-Jordan per il calcolo della matrice inversa di una matrice quadrata A di ordine n, procede come segue: si considera la matrice

  $[\ A|\ I_n]$

  ottenuta affiancando ad A la matrice unita' di ordine n; questa matrice, mediante operazioni elementari per righe, si puo' trasformare in una matrice nella quale il primo blocco sia occupato dalla matrice unita' di ordine n :

  $[\ I_n|\ B]$;

  allora, in questa matrice, il secondo blocco e' occupato dalla matrice inversa di A :

  $B = A^{-1}$.

  Nel nostro caso, l'algoritmo di Gauss-Jordan opera come segue:

$$[\ A|\ I_3] \quad = \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 16 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$
\mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 12 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
\mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -5 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
\mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -2 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]
$$

$$
\mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] = [\ I_3 |\ B].
$$

Dunque l'inversa di A e' data da

$$
\begin{aligned}
A^{-1} = B \quad &= \begin{bmatrix} 6 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ -8 & 6 & -1 \\ 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 12 & -7 & 1 \\ -16 & 12 & -2 \\ 6 & -5 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

- Osserviamo che entrambi i sistemi lineari dati hanno A come matrice dei coefficienti; possiamo rappresentarli sinteticamente come

$$
A\ \underline{x} = \underline{b}_1, \qquad A\ \underline{x} = \underline{b}_2,
$$

dove $\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, e

$\underline{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad \underline{b}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}.$

Sappiamo che A e' invertibile, e ne conosciamo l'inversa; possiamo dunque afferemare che tutti i sistemi lineari che hanno A come matrice dei coefficienti sono determinati, e possiamo risolvere ciascun sistema premoltiplicando entrambi i membri per A^{-1} :

$$
\underline{x} = A^{-1}\underline{b}_1 \quad = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 12 & -7 & 1 \\ -16 & 12 & -2 \\ 6 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},
$$

$$\underline{x} = A^{-1}\underline{b}_2 \quad = \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 12 & -7 & 1 \\ -16 & 12 & -2 \\ 6 & -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Si verifichi che la matrice trovata come inversa di A sia effettivamente l'inversa di A e che il vettore trovato come soluzione di ciascun sistema sia effettivamente soluzione del sistema.

2. **Esercizio 2** *E' data la matrice*

$$A_t = \begin{bmatrix} t+1 & 1 & 1 \\ 1 & t+1 & 1 \\ 1 & 1 & t+1 \end{bmatrix},$$

dove t e' un parametro reale. Si determinino le condizioni su t tali che la matrice A_t sia non singolare. Sotto tali condizioni, si risolva il sistema lineare

$$\begin{cases} (t+1)x & +y & +z & = & 3 \\ x & +(t+1)y & +z & = & 3 \\ x & +y & +(t+1)z & = & 3 \end{cases}.$$

Svolgimento

- Per definizione, la matrice A_t e' non singolare se e solo se tutti i sistemi lineari che hanno A come matrice dei coefficienti sono determinati; abbiamo stabilito, fra l'altro, che cio' capita se e solo se vale una delle seguenti condizioni: l'algoritmo di Gauss trasforma A in una matrice triangolare superiore non degenere; il determinante di A e' diverso da zero.

  L'ultima condizione e' la piu' adeguata al nostro caso, nel quale la matrice ha qualche elemento che dipende da un parametro.

  Calcoliamo dunque

$$\begin{aligned} \det\begin{bmatrix} t+1 & 1 & 1 \\ 1 & t+1 & 1 \\ 1 & 1 & t+1 \end{bmatrix} &= \\ (t+1)\cdot\begin{bmatrix} t+1 & 1 \\ 1 & t+1 \end{bmatrix} - 1\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t+1 \end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix} 1 & t+1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} &= \\ (t+1)\left((t+1)^2-1\right) - (t+1-1) + (1-(t+1)) &= \\ (t+1)\left(t^2+2t\right) - 2t &= t^3+3t^2. \end{aligned}$$

La matrice A_t sara' non singolare se e solo se il parametro t soddisfa la condizione

$$t^3 + 3t^2 \neq 0 \quad cioe' \quad t^2(t+3) \neq 0 \quad cioe' \quad \begin{cases} t \neq 0 \\ t \neq -3 \end{cases}$$

- Il sistema lineare dato, che possiamo scrivere come

$$\begin{bmatrix} t+1 & 1 & 1 \\ 1 & t+1 & 1 \\ 1 & 1 & t+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix},$$

ha la matrice A_t come matrice dei coefficienti.

Per il punto precedente, sotto le condizioni $t \neq 0,\ t \neq -3$, la matrice A_t e' non singolare, e dunque sotto queste condizioni il sistema dato sara' determinato.

Possiamo determinarne la soluzione usando l'algoritmo di Gauss, o determinando l'inversa di A_t, oppure con la regola di Cramer.

La regola di Cramer porge

$$x = \frac{\det\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & t+1 & 1 \\ 3 & 1 & t+1 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} t+1 & 1 & 1 \\ 1 & t+1 & 1 \\ 1 & 1 & t+1 \end{bmatrix}} = \frac{3t^2}{t^2(t+3)} = \frac{3}{t+3}$$

$$y = \frac{\det\begin{bmatrix} t+1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & t+1 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} t+1 & 1 & 1 \\ 1 & t+1 & 1 \\ 1 & 1 & t+1 \end{bmatrix}} = \frac{3t^2}{t^2(t+3)} = \frac{3}{t+3}$$

$$z = \frac{\det\begin{bmatrix} t+1 & 1 & 3 \\ 1 & t+1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} t+1 & 1 & 1 \\ 1 & t+1 & 1 \\ 1 & 1 & t+1 \end{bmatrix}} = \frac{3t^2}{t^2(t+3)} = \frac{3}{t+3}$$

Variazioni. Per $t \neq 0,\ t \neq -3$, si risolva il sistema calcolando l'inversa della matrice A_t. Per $t = 0$ e per $t = -3$, si risolva, se possibile, il sistema.