Algebra/ Algebra Lineare - 23.03.07

1. **Esercizio 1** *E' data la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{10} \\ & \\ 1 & \frac{11}{10} \end{bmatrix}.$$

- *Si determinino gli autovalori di* A;
- *per ciascun autovalore di* A, *si determinino i corrispondenti autovettori di* A, *e fra di essi se ne scelga uno;*
- *si mostri che affiancando gli atovettori scelti si ottiene una matrice invertibile, e se ne calcoli l'inversa;*
- *si dia una formula per la potenza* A^m *della matrice* A, *con* m *intero naturale.*

Svolgimento.

- Ricordiamo che, data una matrice A quadrata di ordine n, un vettore non nullo $\underline{0} \neq \underline{v} \in R^n$ si dice autovettore di A se esiste uno scalare $\lambda \in R$ tale che valga l'uguaglianza

$$A\ \underline{v} = \lambda\ \underline{v};$$

lo scalare λ si dice autovalore di A associato all'autovettore $\underline{v}$.
Da un altro punto di vista, si puo' dire che uno scalare $\lambda \in R$ e' un autovalore di A se esiste un vettore non nullo $\underline{0} \neq \underline{v} \in R^n$ tale che valga l'uguaglianza

$$A\ \underline{v} = \lambda\ \underline{v}.$$

Ora, questa uguaglianza si puo' scrivere come

$$\begin{aligned} A\ \underline{v} - \lambda\ \underline{v} &= \underline{0}; \qquad cioe' \\ (A - \lambda\ I_n)\underline{v} &= \underline{0}. \end{aligned}$$

Per ciascun scalare λ, questa uguaglianza rappresenta un sistema lineare omogeneo di n equazioni in n incognite, che ammette qualche soluzione non banale $\underline{v} \neq \underline{0}$ se e solo se la sua matrice dei coefficienti $A - \lambda\ I_n$ e' singolare, e cio' capita se e solo se

$$\det(A - \lambda\ I_n) = 0.$$

Il primo membro di questa uguaglianza e' un polinomio di grado n nell'incognita λ, detto polinomio caratteristico della matrice A. Dunque, possiamo dire che gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico di A.

Nel nostro caso si ha:

$$\begin{aligned} A - \lambda\, I_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{10} \\ 1 & \frac{11}{10} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\lambda & -\frac{1}{10} \\ 1 & \frac{11}{10} - \lambda \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

il polinomio caratteristico di A e'

$$\det\left(A - \lambda\, I_2\right) = -\lambda \left(\frac{11}{10} - \lambda \right) + \frac{1}{10} = \lambda^2 - \frac{11}{10}\lambda + \frac{1}{10};$$

gli autovalori di A sono le radici di questo polinomio di secondo grado

$$\frac{\frac{11}{10} \pm \sqrt{\left(\frac{11}{10}\right)^2 - \frac{4}{10}}}{2} = \begin{array}{c} 1 = \lambda_1 \\ \\ \frac{1}{10} = \lambda_2 \end{array}.$$

- Gli autovettori di A cui corrisponde l'autovalore $\lambda_1 = 1$ sono i vettori non nulli $\underline{0} \neq \underline{x} = [x_i]_{i=1,2}$ tali che valga l'uguaglianza

$$\begin{aligned} A\, \underline{x} &= 1 \cdot \underline{x}, \\ (A - I_2)\underline{x} &= \underline{0}, \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{10} \\ 1 & \frac{11}{10} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ora, questo sistema lineare omogeneo equivale all'unica equazione omogenea

$$x_1 + \frac{1}{10} x_2 = 0,$$

che ha infinite soluzioni del tipo

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10}p \\ p \end{bmatrix},$$

dove p e' un parametro reale libero. Questi vettori, tranne il vettore nullo, sono dunque gli autovettori di A cui corrisponde l'autovalore $\lambda_1 = 1$.

Scegliamo $\underline{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ \\ 10 \end{bmatrix}$.

- Gli autovettori di A cui corrisponde l'autovalore $\lambda_2 = \frac{1}{10}$ sono i vettori non nulli $\underline{0} \neq \underline{x} = [x_i]_{i=1,2}$ tali che valga l'uguaglianza

$$\begin{aligned} A\,\underline{x} &= \frac{1}{10} \cdot \underline{x}, \\ \left(A - \frac{1}{10} I_2\right) \underline{x} &= \underline{0} \\ \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ \\ 1 & \frac{11}{10} - \frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ora, questo sistema lineare omogeneo equivale all'unica equazione omogenea

$$x_1 + x_2 = 0,$$

che ha infinite soluzioni del tipo

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p \\ \\ p \end{bmatrix},$$

dove p e' un parametro reale libero. Questi vettori, tranne il vettore nullo, sono dunque gli autovettori di A cui corrisponde l'autovalore $\lambda_2 = \frac{1}{10}$.

Scegliamo $\underline{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ \\ 1 \end{bmatrix}$.

- Affiancando i due autovettori scelti si ottiene la matrice

$$P = \begin{bmatrix} \underline{u} & \underline{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \\ 10 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ora, questa matrice ha determinante $\det P = 9 \neq 0$, percio' e' invertibile. Dalla formula generale per l'inversa di una matrice, in funzione del suo detrminante e dei suoi complementi algebrici, otteniamo

$$P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}.$$

- Ora, il fatto che moltiplicare la matrice A per gli autovettori $\underline{u}, \underline{v}$, equivale a moltiplicare gli autovettori $\underline{u}, \underline{v}$, per i corrispondenti autovalori $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{10}$:

$$A\ \underline{u} = \underline{u}, \qquad A\ \underline{v} = \frac{1}{10}\underline{v},$$

si puo' esprimere sinteticamente dicendo che moltiplicare la matrice A per la matrice $P = \begin{bmatrix} \underline{u} & \underline{v} \end{bmatrix}$ degli autovettori $\underline{u}, \underline{v}$, equivale a moltiplicare la matrice $P = \begin{bmatrix} \underline{u} & \underline{v} \end{bmatrix}$ degli autovettori $\underline{u}, \underline{v}$, per la matrice diagonale D con elementi diagonali i corrispondenti autovalori $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{10}$:

$$A\begin{bmatrix} \underline{u} & \underline{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\underline{u} & A\underline{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{u} & \frac{1}{10}\underline{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{u} & \underline{v} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix},$$

in breve

$$AP = PD.$$

Ora, per l'invertibilita' della matrice P, possiamo esprimere la matrice A in funzione della matrice P dei suoi autovettori e della matrice D dei suoi autovalori:

$$A = PDP^{-1}.$$

Di conseguenza, possiamo esprimere le potenze della matrice A in funzione della matrice P dei suoi autovettori e delle potenze della matrice D dei suoi autovalori:

$$A^m = PD^mP^{-1}, \qquad m = 1, 2, \ldots.$$

Abbiamo cosi'

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{10} \\ 1 & \frac{11}{10} \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix}^m \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10^m} \end{bmatrix}\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 + \frac{1}{10^{m-1}} & -1 + \frac{1}{10^m} \\ \\ 10 - \frac{1}{10^{m-1}} & 10 - \frac{1}{10^m} \end{bmatrix}.$$

Notiamo infine che

$$\lim_{m\to\infty} A^m = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \\ 10 & 10 \end{bmatrix}.$$

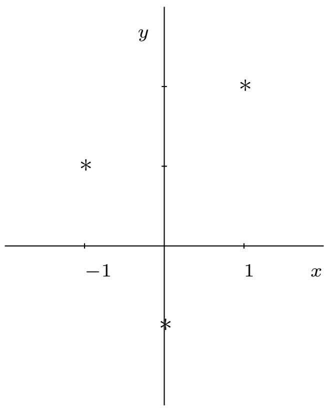
- **Esercizio 2.** Si determini la funzione lineare affine

$$y = \alpha + \beta x$$

che soddisfa al meglio, nel senso dei minimi quadrati, le condizioni

$$\begin{array}{r|l} x & y \\ \hline -1 & p \\ 0 & q \\ 1 & r \end{array},$$

dove p, q, r sono parametri reali.



Svolgimento. Una funzione lineare affine soddisfa esattamente le condizioni poste se e solo se i suoi parametri α, β sono soluzioni esatte del sistema lineare

$$\begin{cases} \alpha - \beta & = & p \\ \alpha & = & q \\ \alpha + \beta & = & r \end{cases}, \quad cioe' \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix},$$

in breve

$$A\underline{\alpha} = \underline{p}.$$

Una funzione lineare affine soddisfa al meglio, nel senso dei minimi quadrati, le condizioni poste se e solo se il vettore $\underline{\alpha}^*$ dei suoi parametri e' una soluzione ai minimi quadrati di questo sistema lineare, cioe' minimizza la norma del vettore scarto fra primo membro e termine noto o, equivalentemente, minimizza il quadrato della norma del vettore scarto fra primo membro e termine noto:

$$\begin{aligned}\left\|A\underline{\alpha} - \underline{p}\right\|^2 &= \left\| \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &= (\alpha - \beta - p)^2 + (\alpha - q)^2 + (\alpha + \beta - r)^2 .\end{aligned}$$

Sappiamo che il vettore $\underline{\alpha}^*$ ha questa proprieta' se e solo se rende il vettore scarto ortogonale alle colonne della matrice A dei coefficienti:

$$A \perp \left(A\underline{\alpha}^* - \underline{p}\right), \quad \mathit{cioe'} \quad A'\left(A\underline{\alpha}^* - \underline{p}\right) = \underline{0}, \quad o \quad A'A\underline{\alpha}^* = A'\underline{p}.$$

Nel nostro caso le colonne di A sono linearmente indipendenti, e sappiamo che in questo caso la matrice $A'A$ e' invertibile, cosi' c'e' una sola soluzione ai minimi quadrati, ed e'

$$\underline{\alpha}^* = (A'A)^{-1} A'\underline{p}.$$

Dunque

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix},\end{aligned}$$

e si ha

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \frac{p+q+r}{3}, \\ \beta^* &= \frac{-p+r}{2}. \end{aligned}$$

In definitiva, la funzione lineare affine che soddisfa al meglio, nel senso dei minimi quadrati, le condizioni poste e'

$$y = \frac{p+q+r}{3} + \frac{-p+r}{2}x.$$

Osserviamo che si ottiene una funzione costante se e solo se $p = r$, cio' se il valore richiesto in $x = -1$ era uguale al valore richiesto in $x = 1$.

Nella figura si aveva $p = 1, q = -1, r = 2$, e per questi valori dei parametri la funzione richiesta diviene

$$y = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}x$$

e il suo grafico e'