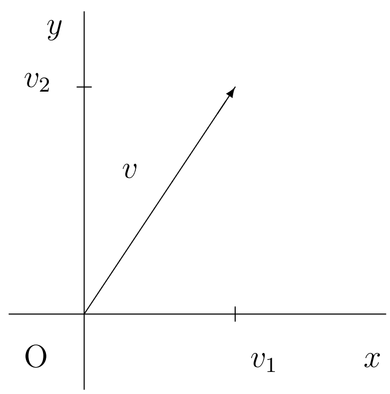
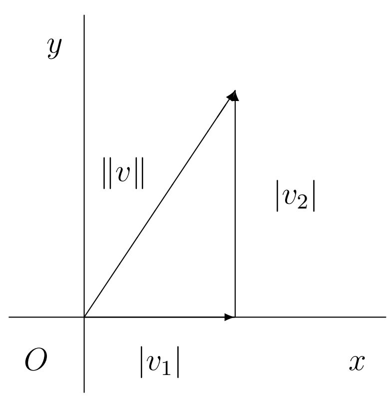
Algebra - Algebra lineare, 07.03.08 - 2

1. **Lunghezza, ortogonalita' e prodotto interno, nel piano.**

   Sia fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico. Possiamo interpretare un vettore $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$ come il vettore applicato nel punto origine O avente secondo estremo nel punto di coordinate (v_1, v_2) :

   Ora, un punto che partendo da O si sposta di v_1 unita' nella direzione dell'asse x e poi si sposta di v_2 unita' nella direzione dell'asse y descrive i due cateti di un triangolo rettangolo che ammette v come ipotenusa.

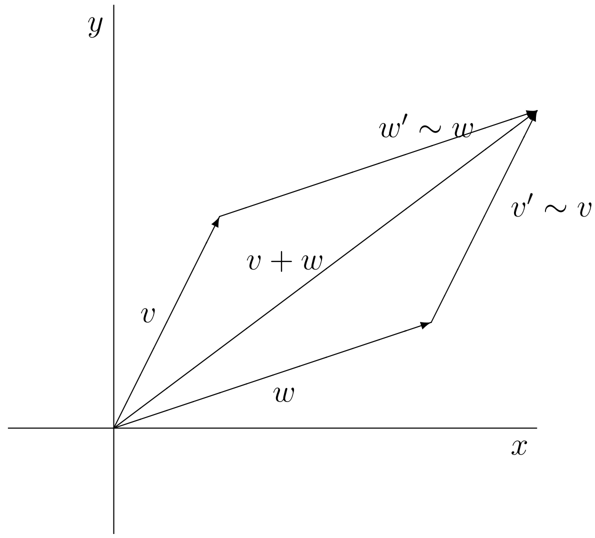
   

   Dunque, per il Teorema di Pitagora, si ha che la lunghezza $\|v\|$ del vettore $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ e' data, nell'unita' di misura scelta, da

   $$\|v\| = \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

   La lunghezza dei vettori e' legata alle operazioni sui vettori nel modo seguente:

   - Consideriamo due vettori v, w e il vettore $v + w$ loro somma.



Osserviamo che un punto che partendo da O si sposta prima lungo il vettore v e poi si sposta lungo il vettore $w' \sim w$ descrive due lati di un triangolo che ammette il vettore $v + w$ come terzo lato. Ora, la lunghezza di un lato di un triangolo non supera la somma delle lunghezze degli altri due. Si ha cosi' si ha disuguaglianza

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|,$$

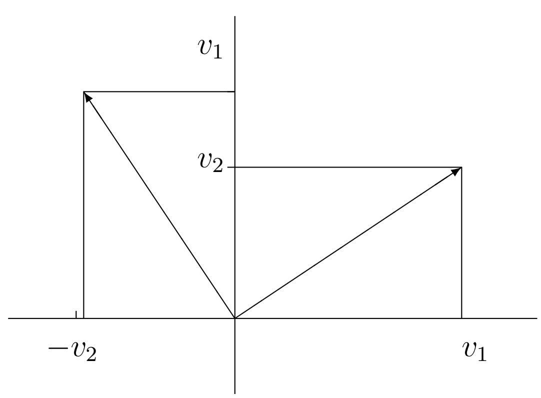
detta appunto *disuguaglianza triangolare.*

- Consideriamo un vettore v, uno scalre r e il vettore vr multiplo di v secondo r. Allora:

$$\|vr\| = \|v\||r|,$$

dove $|r|$ e' il valore assoluto di r.

Dato un vettore $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, ci sono un paio di scelte naturali per un vettore ortogonale a v, una delle quali e' $\begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}$.



I vettori ortogonali al vettore v sono tutti e soli quelli del tipo

$$\begin{bmatrix} -v_1 r \\ v_2 r \end{bmatrix},$$

dove r e' uno scalare qualsiasi. Si puo' osservare che la somma dei prodotti delle componenti corrispondenti e' sempre nulla:

$$v_1 \cdot (-v_2 r) + v_2 \cdot (v_1 r) = 0, \qquad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Per ogni coppia di vettori $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$, il numero reale dato dall'espressione

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a^T b$$

viene detta *prodotto interno (canonico)* dei vettori a e b. Si noti che il prodotto interno e' simmetrico

$$a^T b = b^T a.$$

Utilizzando il prodotto interno, possiamo riscrivere la lunghezza di un vettore a di $\mathbb{R}^2$ nella forma

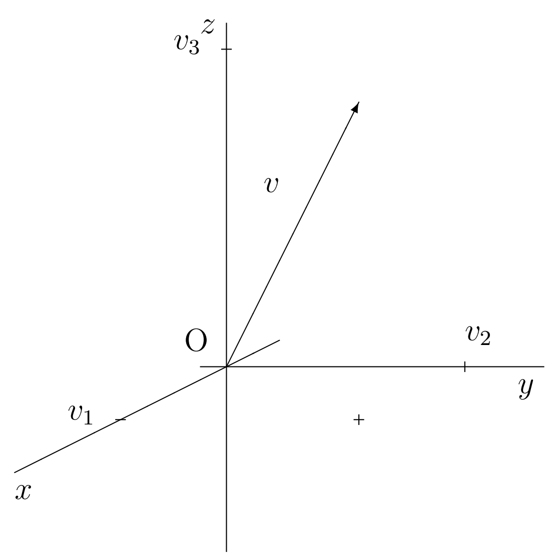
$$\|a\| = \sqrt{a^T a},$$

e possiamo riscrivere la condizione di ortogonalita' nella forma

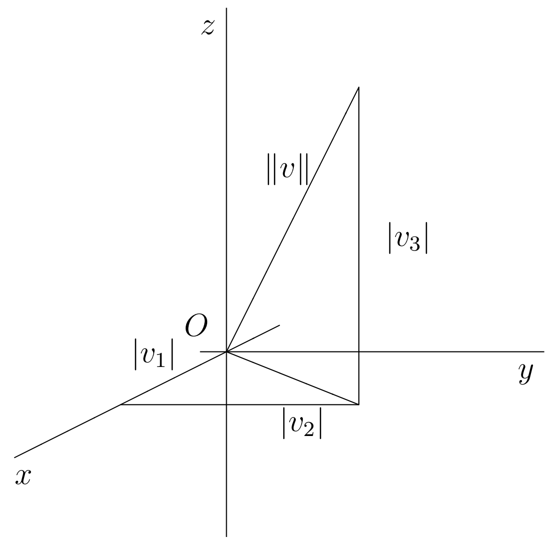
$$a \perp b \quad \textit{se e solo se} \quad a^T b = 0 = b^T a.$$

2. **Lunghezza, ortogonalita' e prodotto interno, nello spazio**

   Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, possiamo interpretare un vettore $v = [v_i]_{i=1}^3$ di $\mathbb{R}^3$ come il vettore applicato nel punto origine O avente secondo estremo nel punto di coordinate $(v_i)_{i=1}^3$:



   Ora, un punto che partendo da O si sposta prima nel punto di coordinate $(v_1, v_2, 0)$ e poi si sposta di v_3 unita' nella direzione dell'asse z, descrive i due cateti di un triangolo rettangolo che ammette v come ipotenusa.



Dunque, per il Teorema di Pitagora, si ha che la lunghezza $\|v\|$ del vettore $v = [v_i]_{i=1}^3$ e' data, nell'unita' di misura scelta, da

$$\|v\| = \sqrt{\sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2}^2 + |v_3|^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Si verifica che due vettori $v = [v_i]_{i=1}^3$ e $v = [w_i]_{i=1}^3$, sono ortogonali se e solo se la somma dei prodotti delle componenti corrispondenti e' nulla:

$$v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0$$

Per ogni coppia di vettori $a = [a_i]_{i=1}^3$ e $b = [b_i]_{i=1}^3$ di $\mathbb{R}^3$, il numero reale dato dall'espressione

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a^T b$$

viene detta *prodotto interno (canonico)* dei vettori a e b. Si noti che il prodotto interno e' simmetrico

$$a^T b = b^T a.$$

Utilizzando il prodotto interno, possiamo riscrivere la lunghezza di un vettore a di $\mathbb{R}^3$ nella forma

$$\|a\| = \sqrt{a^T a},$$

e possiamo riscrivere la condizione di ortogonalita' fra due vettori a e b di $\mathbb{R}^3$ nella forma

$$a \perp b \quad \textit{se e solo se} \quad a^T b = 0 = b^T a.$$

3. **Norma, ortogonalita' e prodotto interno nello spazio $\mathbb{R}^n$.**

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ definiamo il prodotto interno di due vettori $a = [a_i]_{i=1}^n$ e $b = [b_i]_{i=1}^n$ come il numero reale dato dall'espressione

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a^T b.$$

Il prodotto interno di un vettore $a = [a_i]_{i=1}^n$ con se' stesso si annulla se e solo se tutte le componenti a_i di a sono nulle, cioe' a e' il vettore nullo 0_n di $\mathbb{R}^n$:

$$a^T a = \sum_{i=1}^n a_i^2 = 0 \quad \textit{se e solo se} \quad a = 0_n.$$

Il prodotto interno e' simmetrico:

$$a^T b = b^T a.$$

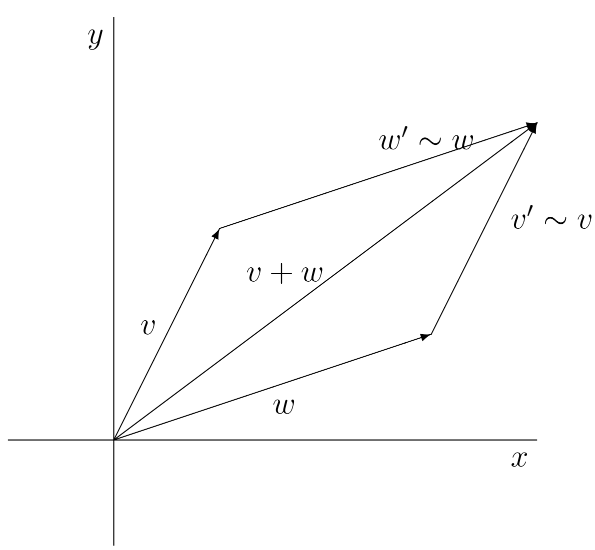
Definiamo la lunghezza $\|v\|$ di un vettore $v = [v_i]_{i=1}^n$ di $\mathbb{R}^n$ ponendo

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}.$$

Solitamente, specialmente nel caso $n > 3$, al termine *lunghezza* si preferisce il termine *norma.*

Le principali proprieta' della norma dei vettori in $\mathbb{R}^n$ sono:

- la norma di un vettore e' nulla se e solo se il vettore e' nullo:
  $\|v\| = 0 \quad \textit{se e solo se} \quad v = 0.$
- La norma del vettore somma e' minore o uguale alla somma delle norme dei vettori addendi:
  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$
  Questa disuguaglianza viene detta *disuguaglianza triangolare*, per il significato che assume nel piano e nello spazio.



- La norma del vettore prodotto di un vettore per uno scalare e' uguale al prodotto della norma del vettore per il valore assoluto dello scalare:

$$\|vr\| = \|v\||r|, \qquad r \in \mathbb{R}.$$

Per definizione, diciamo che due vettori $v = [v_i]_{i=1}^n$ e $v = [w_i]_{i=1}^n$, di $\mathbb{R}^n$ sono ortogonali se e solo se il loro prodotto interno e' nullo:

$$v \perp w \quad \textit{se e solo se} \quad v^T w = 0 = w^T v.$$

Nello spazio $\mathbb{R}^n$ vale il teorema di Pitagora: se due vettori a e b sono ortogonali, cioe' se $a^T b = 0 = b^T a$, allora

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

Infatti

$$\begin{aligned}\|a+b\|^2 &= (a+b)^T(a+b) \\ &= (a^T + b^T)(a+b) \\ &= a^T a + a^T b + b^T a + b^T b \\ &= \|a\|^2 + \|b\|^2.\end{aligned}$$