Algebra/Algebra Lineare 22.02.08

1. **Addizione di due matrici.**

   Siano m ed n due interi positivi fissati. Date due matrici $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ di tipo $m \times n$, sommando a ciascun elemento di A il corrispondente elemento di B, si ottiene una nuova matrice in $\mathbb{R}^{m\times n}$, detta matrice somma di A e B ed indicata con
   $$A + B.$$
   Ad esempio, si ha:
   $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 11 & 15 \\ 14 & 18 \end{bmatrix}$$
   In simboli, posto
   $$\begin{array}{ll} A: \ A(i,j), & i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n \\ B: \ B(i,j), & i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n, \end{array}$$
   si ha
   $$(A+B)(i,j) = A(i,j) + B(i,j), \qquad i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n.$$
   Nel caso $m = n = 1$ abbiamo l'usuale somma di numeri reali. L'addizione di matrici in $\mathbb{R}^{m\times n}$ possiede le stesse proprieta', associativa e commutativa, dell'addizione di numeri reali. Il ruolo che il numero zero gioca per l'addizione di numeri reali, per le matrici in $\mathbb{R}^{m\times n}$ e' giocato dalla matrice nulla
   $$0 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$
   di tipo $m \times n$, nel senso che
   $$0 + A = A = A + 0, \qquad \textit{per ogni } A \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

2. **Prodotto di un numero reale per una matrice**

   Date una matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ di tipo $m\times n$, e dato uno scalare r in $\mathbb{R}$, moltiplicando ciascun elemento di A per lo scalare r si ottiene una nuova matrice in $\mathbb{R}^{m\times n}$, detta matrice prodotto della matrice A per lo scalare r, ed indicata con
   $$rA.$$
   Ad esempio, si ha:

$$7\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 28 \\ 35 & 42 \end{bmatrix}$$

In simboli, posto

$$A:\ A(i,j), \qquad i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n,$$

si ha

$$(rA)(i,j) = rA(i,j) \qquad i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n.$$

La moltiplicazione di una matrice A per uno scalare r puo' essere realizzata come la premoltiplicazione o la postmoltiplicazione di A per opportune matrici.

Ad esempio, si ha

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 7 & 14 & 21 \\ 28 & 35 & 42 \end{bmatrix} &= 7\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

In generale, la moltiplicazione di una matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ per uno scalare r puo' essere realizzata come la premoltiplicazione di A per la matrice rI_m oppure come la postmoltiplicazione di A per la matrice rI_n :

$$rA = (rI_m)A = A(rI_n).$$

Per questa ragione, le matrici rI vengono dette *matrici scalari*.

Da queste considerazioni segue che in generale, per i vettori colonna e' meglio scrivere gli scalari a destra, e per i vettori riga e' meglio scrivere gli scalari a sinistra.

3. Usando le operazioni sopra introdotte, possiamo riguardare ogni matrice come ottenuta 'combinando' (introdurremo in seguito il termine esatto) alcune 'matrici elementari'.

   Possiamo scomporre il generico vettore colonna in $\mathbb{R}^{3\times 1}$ nella forma

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} a_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} a_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} a_3
\end{aligned}$$

In $\mathbb{R}^{n\times 1}$, indicato con $\underline{e}_1$ il vettore colonna avente la prima componente uguale a 1 e le altre componenti zero, indicato con $\underline{e}_2$ il vettore colonna avente la seconda componente uguale a 1 e le altre componenti zero, ... possiamo scrivere il generico vettore colonna $\underline{a}$ nella forma

$$\underline{a} = \underline{e}_1 a_1 + \underline{e}_2 a_2 + \cdots + \underline{e}_n a_n,$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono le componenti di $\underline{a}$.

In $\mathbb{R}^{1\times n}$, indicato con $\underline{e}'_1$ il vettore riga avente la prima componente uguale a 1 e le altre componenti zero, indicato con $\underline{e}'_2$ il vettore riga avente la seconda componente uguale a 1 e le altre componenti zero, ... possiamo scrivere il generico vettore riga $\underline{a}'$ nella forma

$$\underline{a}' = a_1 \underline{e}'_1 + a_2 \underline{e}'_2 + \cdots + a_n \underline{e}'_n,$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono le componenti di $\underline{a}$.

In $\mathbb{R}^{m\times n}$, indicata con E_{pq} la matrice avente l'elemento di posto (p, q) uguale a 1 e tutti gli altri elementi uguali a zero, possiamo scrivere la generica matrice A nella forma

$$A = \sum_{\substack{p=1,\ldots,m \\ q=1,\ldots,n}} E_{pq} a_{pq},$$

dove a_{pq} e' l'elemento di posto (p, q) nella matrice A.

Le matrici E_{pq} di $\mathbb{R}^{m\times n}$ vengono dette *matrici elementari*. Si osservi che

$$E_{pq} = \underline{e}_p \underline{e}'_q.$$

4. L'operazione di moltiplicazione di matrici possiede le proprieta' distributive sinistra e destra rispetto all'addizione di matrici:

$$\begin{array}{rcl} (A+B)C & = & AC + BC \\ B(C+D) & = & BC + BD \end{array}$$

per ogni A, B matrici di tipo $m \times n$ e C, D matrici di tipo $n \times p$.

Le operazioni di prodotto di matrici e di prodotto di uno scalare per una matrice sono legate dalla proprieta'

$$r(PQ) = (rP)Q = P(rQ)$$

per ogni P, Q matrici moltiplicabili ed ogni scalare r.

Verifichiamo la prima proprieta' nel caso in cui A e B siano vettori riga in $\mathbb{R}^{1\times n}$ e C sia un vettore colonna in $\mathbb{R}^{n\times 1}$:

$$\left(\begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & \dots & a_n + b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$= (a_1 + b_1)c_1 + \cdots (a_n + b_n)c_n;$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n + a_1 c_1 + \cdots + a_n c_n.$$

I due risultati sono uguali per la proprieta' distributiva della moltiplicazione di numeri reali rispetto all'addizione.

5. **Matrice trasposta**

Siano m ed n due interi positivi fissati. Data una matrice A di tipo $m \times n$, riscrivendo per colonne cio' che in A compare per righe (o, che e' lo stesso, riscrivendo per righe cio' che in A compare per colonne), si ottiene una matrice di tipo $n \times m$, detta matrice trasposta di A ed indicata con

$$A^T.$$

Ad esempio, si ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

In simboli, posto

$A: \ A(i,j), \qquad i = 1, \dots, m; \ j = 1, \dots, n,$

$A^T: \ A^T(j,i), \qquad j = 1, \dots, n; \ i = 1, \dots, m,$

si ha:

$A^T(i,j) = A(j,i).$

L'operazione di trasposizione possiede le seguenti proprieta':

$\left(A^T\right)^T = A,$

per ogni matrice A;

$(A + B)^T = A^T + B^T$

per ogni coppia A, B di matrici sommabili;

$(AB)^T = B^T A^T$

per ogni coppia A, B di matrici moltiplicabili;

$(rA)^T = rA^T$

per ogni matrice A ed ogni scalare r.

Verifichiamo la proprieta' relativa alla moltiplicazione di matrici nel caso in cui A sia un vettore riga e B sia un vettore colonna:

$$\left(\begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} \right)^T = (a_1b_1 + \cdots + a_pb_p)^T = a_1b_1 + \cdots + a_pb_p,$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_p \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = b_1a_1 + \cdots + b_pa_p.$$

I due risultati sono uguali per la commutativita' della moltiplicazione di numeri reali.

Per finire, osserviamo che una matrice quadrata A e' invertibile se e solo se la sua trasposta A^T e' invertibile, inoltre l'inversa della trasposta e' la trasposta dell'inversa:

$\left(A^T\right)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Ad esempio, da

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}$,

segue

$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1.5 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$.

La verifica di questa proprieta' e' tutta nelle tre righe seguenti:

$AB = I_n = BA$

$(AB)^T = (I_n)^T = (BA)^T$

$B^TA^T = I_n = A^TB^T$.

6. In $\mathbb{R}^n$ si ha il seguente fatto: ogni vettore si puo' scrivere come somma di un vettore avente tutte le componenti uguali fra loro e di un vettore avente somma delle componenti uguale a zero. Usando le operazioni sulle matrici, possiamo renderci conto del perche' si ha questo fatto, e possiamo vedere come effettuare questa scomposizione.

   I vettori aventi tutte le componenti uguali fra loro sono i vettori della forma

$$\begin{bmatrix} t \\ t \\ \vdots \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} t = \underline{u}t,$$

   dove $\underline{u}$ e' il vettore avente tutte le componenti uguali a uno e t varia fra i numeri reali.

I vettori aventi somma delle componenti uguale a zero sono le soluzioni delle'equazione lineare

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, \quad [\,1\;1\;\ldots\;1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0 \quad cioe' \quad \underline{u}'\underline{x} = 0.$$

Noi vogliamo dunque scrivere il generico vettore $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^n$ nella forma

$$\underline{a} = \underline{u}\; t + \underline{v},$$

dove $t \in \mathbb{R}$ e $\underline{v}$ e' una soluzione dell'equazione di sopra, cioe'

$$\underline{u}'\underline{v} = 0.$$

Ora, ricavando v dalla prima relazione e sostituendo nella seconda relazione, si ha

$$\underline{u}'\,(\underline{a} - \underline{u}\; t) = 0, \quad \underline{u}'\underline{a} - \underline{u}'\underline{u}\; t = 0.$$

Questa e' un'equazione lineare nell'incognita t :

$$\underline{u}'\underline{u}\; t = \underline{u}'\underline{a},$$

che, sostituendo ai simboli i loro valori, diviene

$$[\,1\;\ldots\;1] \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} t = [\,1\;\ldots\;1] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \qquad nt = a_1 + \cdots + a_n,$$

da cui

$$t = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \mu_a,$$

la media delle componenti del vettore $\underline{a}$.

In definitiva, la scomposizione e'

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \mu_a + \begin{bmatrix} a_1 - \mu_a \\ \vdots \\ a_n - \mu_a \end{bmatrix}.$$

7. Usando l'operazione di trasposizione, possiamo descrivere in modo sintetico le matrici di covarianza di due o piu' variabili. Considereremo il caso di variabili a media nulla che identificheremo con vettori colonna aventi somma delle componenti uguale a zero; per ragioni di leggibilita', indicheremo i vettori con lettere non sottolineate.

Le varianze e covarianze di due variabili $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ aventi ciascuna media nulla sono date da

$\sigma_a^2 = \frac{1}{n}\left(a_1^2 + \cdots + a_n^2\right) = \frac{1}{n}a'\ a$
$\sigma_{ab} = \frac{1}{n}\left(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n\right) = \frac{1}{n}a'\ b$
$\sigma_{ba} = \frac{1}{n}\left(b_1 a_1 + \cdots + b_n a_n\right) == \frac{1}{n}b'\ a$
$\sigma_b^2 = \frac{1}{n}\left(b_1^2 + \cdots + b_n^2\right) = \frac{1}{n}b'\ b.$

La loro matrice di covarianza puo' essere espressa nella forma

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \sigma_a^2 & \sigma_{ab} \\ \sigma_{ba} & \sigma_b^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{n}\ a'\ a & \frac{1}{n}\ a'\ b \\ \frac{1}{n}\ b'\ a & \frac{1}{n}\ b'\ b \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{n} \begin{bmatrix} a'\ a & a'\ b \\ b'\ a & b'\ b \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{n} \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{n} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

In generale, la matrice di covarianza di p variabili $a, b, \ldots, c$ aventi ciascuna media nulla e' data da

$$\frac{1}{n} A^T A,$$

dove A e' la matrice $[a|b|\ldots|c]$ ottenuta affiancando le colonne $a, b, \ldots, c$.

8. **Potenze**

Sia A una matrice quadrata di ordine n. Per ogni intero realtivo $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ la potenza $p-$ma della matrice A e' definita da

$$A^p = \begin{cases} A\ A\ \cdots\ A \quad (p \textit{ volte}) & \textit{per } p > 0 \\ I_n & \textit{per } p = 0 \\ A^{-1}\ A^{-1}\ \cdots\ A^{-1} \quad (-p \textit{ volte}) & \textit{per } p < 0 \end{cases} ;$$

le potenze con esponente negativo sono dunque definite solo per matrici invertibili.

Esempio:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}^{-2} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 11 & -1 \\ -9 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 11 & -1 \\ -9 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 130 & -12 \\ -108 & 10 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Valgono le usuali proprieta' delle potenze

$A^pA^q = A^{p+q}$;

$(A^p)^q = A^{pq}$;

la proprieta'

$(AB)^p = A^pB^p$

vale sotto al condizione che A e B siano permutabili, cioe' $AB = BA$.

Se A e B sono due matrici invertibili, allora anche il loro prodotto AB e' invertibile, e l'inverso di AB e' il prodotto degli inversi, nell'ordine opposto:

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

9. Fissato un intero positivo n, nell'insieme $\mathbb{R}^{n\times n}$ delle matrici quadrate di ordine n possiamo applicare senza restrizioni le operazioni di moltiplicazione e di addizione, ottenendo ancora matrici quadrate di ordine n. Potremo cosi' considerare espressioni polinomiali in variabili $A, B, C, \dots$ che indicano matrici in $\mathbb{R}^{n\times n}$, equazioni matriciali ...

   Nel calcolo letterale matriciale, bisognera' tenere conto solo delle proprieta' possedute dalle operazioni, essenzialmente moltiplicazione e addizione, sulle matrici, ricordarsi che la moltiplicazione non e' commutativa, e che una matrice diversa dalla matrice nulla puo' non essere invertibile.

   Ad eesempio, si ha:

$$\begin{aligned}(A+B)(A-B) &= A(A-B)+B(A-B)\\ &= A^2-AB+BA-B^2.\end{aligned}$$

   L'identita' notevole

   $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

   vale dunque se e solo se le matrici A e B sono permutabili.

   Tuttavia, tutte le identita' notevoli cotinuano a valere per le espressioni matriciali in cui compare un unico simbolo di matrice.

   Ad esempio, si hanno le identita'

$$\begin{aligned}(I-A)(I+A+\cdots+A^m) &= I-A^{m+1}\\ (I+A)^m &= I+mA+\binom{m}{2}A^2+\cdots+\binom{m}{h}A^h+\cdots+A^m.\end{aligned}$$