Algebra/Algebra Lineare 11.02.08

Sistemi lineari in due e tre incognite

1. In questa lezione, si ricordano alcuni dei concetti e dei fatti principali sui sistemi lineari in al piu' tre incognite, principalmente allo scopo di fissare i termini del discorso.

   Un'equazione lineare in una incognita reale x e' un'equazione della forma
   $$ax = b,$$
   con a, b costanti reali. Se $a \neq 0$, allora l'equazione e' determinata, ed ha come soluzione
   $$x = \frac{b}{a};$$
   se $a = 0$ e $b \neq 0$, l'equazione e' impossibile, e se $a = b = 0$, l'equazione e' indeterminata.

2. Siano x, y due incognite reali. Un esempio di equazione lineare in x, y e'
   $$2x - 5y = 7.$$
   Un esempio di una soluzione di questa equazione e' dato dai valori $x = 1$ e $y = -1$ delle incognite, in breve dalla coppia ordinata $(1, -1)$.

   Possiamo determinare tutte le soluzioni dell'equazione ricavando un'incognita

   $y = 0.4x - 1.4$

   in funzione dell'altra e ponendo quest'ultima uguale a un parametro: le soluzioni dell'equazione sono date dai valori $x = t$ e $y = 0.4t - 1.4$ o, in breve, dalle coppie ordinate
   $$(t,\ 0.4t - 1.4),$$
   ottenute al variare del parametro t fra i numeri reali.

   Fissate nel piano una retta sulla quale pensiamo disposti i valori dell'incognita x, e una retta ad essa ortogonale sulla quale pensiamo disposti i valori dell'incognita y, possiamo identificare ogni coppia ordinata di numeri reali con un punto del piano.

   Le soluzioni dell'equazione data sono rappresentate dai punti di una retta, che nel sistema di riferimento dato ha pendenza 0.4 e passa per il punto $(0, -1.4)$.

3. Le equazioni lineari nelle incognite x, y sono le equazioni della forma
   $$ax + by = c,$$
   dove a, b, c sono costanti reali; a e b sono detti i coefficienti e c il termine noto del'equazione.

Se l'equazione e' effettiva, cioe' se almeno uno dei coefficienti a e b delle incognite e' $\neq 0$, si hanno infinte soluzioni, che dipendono da un parametro reale.

Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani, l'insieme delle soluzioni e' rappresentato da:

- una retta, se almeno uno fra a e b e' $\neq 0$;
- l'insieme vuoto, se $a = b = 0$ e $c \neq 0$;
- l'intero piano, se $a = b = c = 0$.

Due equazioni lineari effettive

$a_1x + b_1y = c_1$,

$a_2x + b_2y = c_2$,

sono rappresentate dalla stessa retta se e solo se hanno parametri proporzionali, cioe' esiste un numero reale $k \neq 0$ tale che

$a_2 = ka_1, \quad b_2 = kb_1, \quad c_2 = kc_1.$

Ogni retta del piano rappresenta qualche equazione lineare -in realta', per quanto appena osservato, varie.

Due equazioni effettive

$a_1x + b_1y = c_1$,

$a_2x + b_2y = c_2$,

sono rappresentate da due rette parallele se e solo se hanno coefficienti proporzionali, cioe' esiste un numero reale $k \neq 0$ tale che

$a_2 = ka_1, \quad b_2 = kb_1.$

4. Un esempio di sistema di due equazioni lineari in x, y e'

$$\begin{cases} x + 2y & = & 3 \\ 4x + 5y & = & 6 \end{cases}.$$

Ciascuna delle due equazioni e' effettiva, dunque e' rappresentata da una retta; inoltre, poiche' i coefficienti 1 e 2 delle incognite nella prima equazione non sono proporzionali ai coefficienti 4 e 5 delle incognite nella seconda equazione, le due rette non sono parallele, cioe' sono incidenti. Il sistema e' determinato.

Possiamo risolvere questo sistema col metodo di sostituzione:

- dalla prima equazione ricaviamo l'incognita x in funzione dell'incognita y, e sostituiamo nella seconda equazione
$$\begin{cases} x & = & -2y + 3 \\ 4(-2y + 3) + 5y & = & 6 \end{cases},$$
cosi' che nella seconda equazione compaia solo la y, e si ha
$$\begin{cases} x & = & -2y + 3 \\ -3y & = & -6 \end{cases};$$

- ricaviamo il valore della y dalla seconda equazione e sostituiamo nella prima, ottenendo cosi' anche il valore dalla x :
$$\begin{cases} x &= -2 \cdot 2 + 3 = -1 \\ y &= 2 \end{cases} .$$

Il sistema ha una ed una sola soluzione:

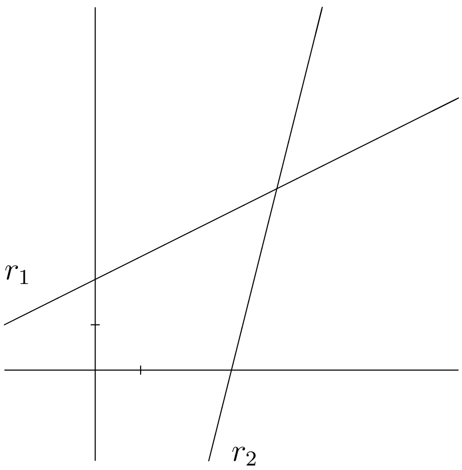
$(-1, 2)$,

e questa coppia ordinata e' rappresentata dall'unico punto in comune alle due rette.

5. Il generico sistema di due equazioni lineari in x, y e'
$$\begin{cases} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{cases} ,$$
dove $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ sono costanti reali. Supponiamo che entrambe le equazioni siano effettive, ed indichiamo con r_1 ed r_2 le rette che le rappresentano.

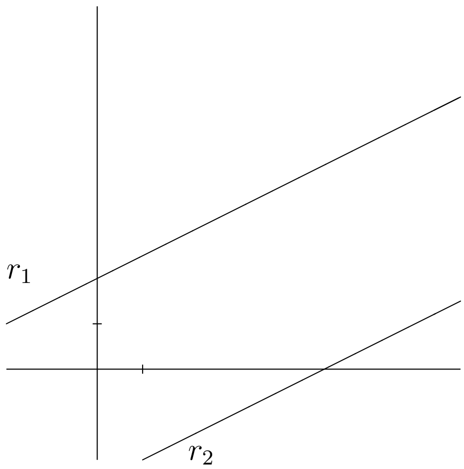
   Allora si hanno i tre casi:

   - se le due coppie (a_1, b_1) e (a_2, b_2) non sono proporzionali, allora le due rette r_1 ed r_2 sono incidenti.



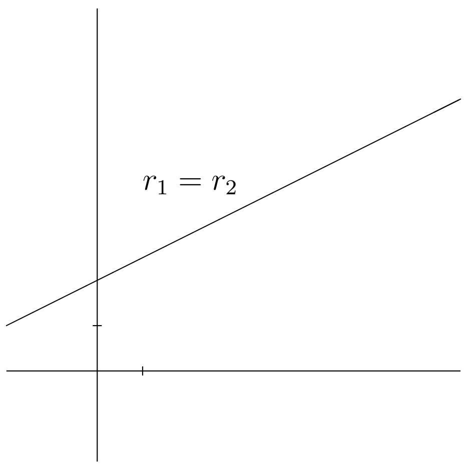
     Il sistema e' determinato, e la sua soluzione e' rappresentata dal punto comune alle due rette.

   - se le due coppie (a_1, b_1) e (a_2, b_2) sono proporzionali e le due terne (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) non sono proporzionali, allora le due rette r_1 ed r_2 sono parallele e distinte.



Il sistema e' impossibile.

- se le due terne (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) sono proporzionali, allora le due rette r_1 ed r_2 sono coincidenti.



Il sistema in realta' si riduce ad un'unica equazione, ed e' indeterminato.

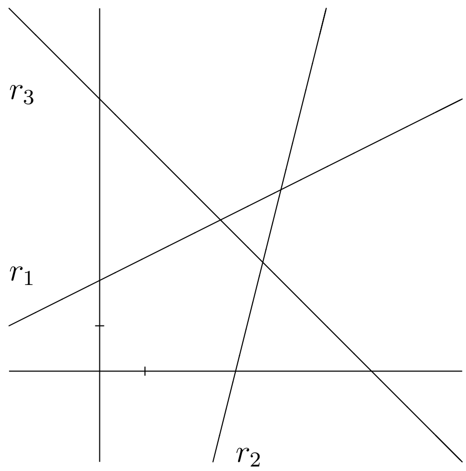
Informalmente, si puo' dire che "in generale, un sistema lineare di due equazioni in due incognite e' determinato," nel senso che le altre due possibilita' si presentano solo in presenza di certe 'coincidenze'.

6. Il generico sistema di tre equazioni lineari in x, y e'

$$\begin{cases} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \\ a_3x + b_3y &= c_3 \end{cases},$$

dove $a_1, b_1, c_1, \ldots, a_3, b_3, c_3$ sono costanti reali.

Informalmente, si puo' dire che "in generale, un sistema lineare di tre equazioni in due incognite e' impossibile," nel senso che le altre due possibilita' si presentano solo in presenza di certe 'coincidenze'.



7. Siano x, y, z tre incognite reali. Un esempio di equazione lineare in x, y, z e'

$$3x + 2y + z = 4$$

Un esempio di una soluzione di questa equazione e' dato dai valori $x = 1$ e $y = 2$ e $z = -3$ delle incognite, in breve dalla terna ordinata $(1, 2, -3)$.

Possiamo determinare tutte le soluzioni dell'equazione ricavando un'incognita

$z = -3x - 2y + 4$

in funzione delle altre e ponendo quest'ultime uguali a due parametri indipendenti: le soluzioni dell'equazione sono date dai valori $x = s$ e $y = t$ e $z = -3s - 2t + 4$ o, in breve, dalle terne ordinate

$$(s, t, -3s - 2t + 4),$$

ottenute al variare del parametri indipendenti s e t fra i numeri reali.

Fissate nello spazio tre rette incidenti in un unico punto e mutuamente ortogonali, una retta sulla quale pensiamo disposti i valori dell'incognita x, una retta sulla quale pensiamo disposti i valori dell'incognita y, una retta sulla quale pensiamo disposti i valori dell'incognita z, possiamo identificare ogni terna ordinata di numeri reali con un punto dello spazio.

Le soluzioni dell'equazione data sono rappresentate dai punti di un piano, che nel sistema di riferimento dato ha pendenza -3 nella direzione dell'asse x, ha pendenza -2 nella direzione dell'asse y, e passa per il punto $(0, 0, 4)$.

8. Le equazioni lineari nelle incognite x, y, z sono le equazioni della forma

$$ax + by + cz = d,$$

dove a, b, c, d sono costanti reali; a, b e c sono detti i coefficienti e d il termine noto del'equazione.

Se l'equazione e' effettiva, cioe' se almeno uno dei coefficienti a, b e c delle incognite e' $\neq 0$, si hanno infinte soluzioni, che dipendono da due parametri reali indipendenti.

Nello spazio, riferito ad un sistema di assi cartesiani, l'insieme delle soluzioni e' rappresentato da:

- una piano, se almeno uno fra a, b e c e' $\neq 0$;
- l'insieme vuoto, se $a = b = c = 0$ e $d \neq 0$;
- l'intero spazio, se $a = b = c = d = 0$.

Due equazioni lineari effettive

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1,$

$a_2x + b_2y + c_2z = d_2,$

sono rappresentate dallo stesso piano se e solo se hanno parametri proporzionali, cioe' esiste un numero reale $k \neq 0$ tale che

$a_2 = ka_1, \quad b_2 = kb_1, \quad c_2 = kc_1 \quad d_2 = kd_1.$

Ogni piano dello spazio rappresenta qualche equazione lineare -in realta', per quanto appena osservato, varie.

Due equazioni effettive

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1,$

$a_2x + b_2y + c_2z = d_2,$

sono rappresentate da due piani paralleli se e solo se hanno coefficienti proporzionali, cioe' esiste un numero reale $k \neq 0$ tale che

$a_2 = ka_1, \quad b_2 = kb_1 \quad c_2 = kc_1.$

9. Un esempio di sistema di due equazioni lineari in x, y, z e'

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5x + 6y + 7z = 8 \end{cases}.$$

Ciascuna delle due equazioni e' effettiva, dunque e' rappresentata da una piano; inoltre, poiche' i coefficienti $1, 2$ e 3 delle incognite nella prima equazione non sono proporzionali ai coefficienti $5, 6$ e 7 delle incognite nella seconda equazione, i due piani non sono paralleli, cioe' sono incidenti in una retta. Il sistema e' indeterminato.

Possiamo risolvere questo sistema col metodo di sostituzione:

- dalla prima equazione ricaviamo l'incognita x in funzione delle incognite y, z, e sostituiamo nella seconda equazione
$\begin{cases} x = -2y - 3z + 4 \\ 5(-2y - 3z + 4) + 6y + 7z = 8 \end{cases},$
cosi' che nella seconda equazione compaiano solo le y, z, e si ha
$\begin{cases} x = -2y - 3z + 4 \\ -4y - 8z = -12 \end{cases};$
- dalla seconda equazione ricaviamo la y in funzione della z, e sostituiamo nella prima, ottenendo cosi' anche la x in funzione della z :
$\begin{cases} x = -2(-2z + 3) - 3z + 4 = z - 2 \\ y = -2z + 3 \end{cases}.$

Il sistema ha le infinite soluzioni:

$(t-2, -2t+3, t)$,

dipendenti da un parametro reale t, e queste terne ordinate sono rappresentate dai punti della retta comune ai due piani.

10. Il generico sistema di due equazioni lineari in x, y, z e'

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases},$$

dove a_i, b_i, c_i, d_i sono costanti reali. Supponiamo che entrambe le equazioni siano effettive, ed indichiamo con α_1 ed α_2 i piani che le rappresentano.

Allora si hanno i tre casi:

- se le due terne (a_i, b_i, c_i), $i = 1, 2$, non sono proporzionali, allora i due piani α_1 ed α_2 sono incidenti in una retta.

  Il sistema e' indeterminato, e l'insieme delle sue soluzioni e' rappresentato dalla retta comune ai due piani.

- se le due terne (a_i, b_i, c_i), $i = 1, 2$, sono proporzionali, e se le due quaterne (a_i, b_i, c_i, d_i), $i = 1, 2$, non sono proporzionali, allora i due piani α_1 ed α_2 sono paralleli e distinti.

  Il sistema e' impossibile.

- se le due quaterne (a_i, b_i, c_i, d_i), $i = 1, 2$, sono proporzionali, allora i due piani α_1 ed α_2 sono coincidenti.

  Il sistema in realta' si riduce ad un'unica equazione, e' indeterminato e l'insieme delle soluzioni e' rappresentato dal piano $\alpha_1 = \alpha_2$.

Informalmente, si puo' dire che "in generale, un sistema lineare di due equazioni in tre incognite e' indeterminato."

11. Un esempio di un sistema lineare di tre equazioni nelle incognite x, y, z e'

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 4x + 5y + 6z = 5 \\ 7x + 8y + 8z = 7 \end{cases}$$

Di seguito riportiamo la risoluzione, secondo il metodo di sostituzione, senza commenti.

$$\begin{cases} x = -2y - 3z + 2 \\ 4(-2y - 3z + 2) + 5y + 6z = 5 \\ 7(-2y - 3z + 2) + 8y + 8z = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2y - 3z + 2 \\ -3y - 6z = -3 \\ -6y - 13z = -7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2y - 3z + 2 \\ y + 2z = 1 \\ 6y + 13z = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2y - 3z + 2 \\ y = -2z + 1 \\ 6(-2z + 1) + 13z = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2y - 3z + 2 = 1 \\ y = -2z + 1 = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Ciascuna delle tre equazioni e' effettiva, dunque e' rappresentata da un piano; i tre piani sono incidenti in un punto, il punto di coordinate

$$(1, -1, 1).$$

12. Il generico sistema di tre equazioni lineari in x, y, z e'

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases},$$

dove a_i, b_i, c_i, d_i sono costanti reali. Supponiamo che tutte e tre le equazioni siano effettive, ed indichiamo con α_1, α_2 ed α_3 i piani che le rappresentano. L'intersezione di questi tre piani potra' essere vuota, un punto, una retta o un piano. Dunque il sistema potra' essere impossibile, determinato, e indeterminato, con soluzioni che dipendono da uno o due parametri.

Non e' semplice, a questo punto iniziale, dire quali condizioni sui parametri del sistema caratterizzano queste quattro eventualita' (tranne l'ultima ...).

Di fatto, si ha che 'in generale' un sistema lineare di tre equazioni in tre incognte e' determinato, e che 'in generale' un sistema lineare di piu' di tre equazioni in tre incognte e' impossibile.