Algebra/Algebra Lineare 13.02.08

Sistemi lineari in un numero qualsiasi di incognite

1. Nel seguito, indicheremo con R^n l'insieme di tutte le $n-$ple ordinate

$$(r_1, r_2, \ldots, r_n)$$

di numeri reali. Per $n = 1, 2, 3$ questo insieme si puo' identificare con una retta, un piano, o lo spazio; si vedra' che i fatti geometrici salienti della geometria dello spazio continuano a valere anche per $n > 3$: gli oggetti avranno pero' natura piu' propriamente algebrica, e cosi' anche i risultati e le loro dimostrazioni.

Un'*equazione lineare* nelle n incognite reali $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e' un'equazione del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \qquad cioe' \qquad \sum_{j=1}^{n} a_jx_j = b,$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ sono costanti reali; gli a_i sono i *coefficienti* e b e' il *termine noto* dell'equazione. Una *soluzione* di questa equazione e' una $n-$pla ordinata $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ di numeri reali che sostituiti alle incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rendono vera l'uguaglianza:

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = b.$$

Se il coefficiente a_1 dell'incognita x_1 e' non nullo, possiamo ricavare x_1 in funzione delle successive incognite, ottenendo

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 - \frac{a_3}{a_1}x_3 - \cdots - \frac{a_n}{a_1}x_n + \frac{b}{a_1}$$

e possiamo descrivere l'insieme delle soluzioni come

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{a_2}{a_1}t_2 - \frac{a_3}{a_1}t_3 - \cdots - \frac{a_n}{a_1}t_n + \frac{b}{a_1} \\ x_2 = t_2 \\ x_3 = t_3 \\ \vdots \\ x_n = t_n \end{cases},$$

dove $t_2, t_3, \ldots, t_n$ sono $n-1$ parametri reali liberi. In modo simile si puo' procedere nel caso in cui ci sia almeno un coefficiente a_i non nullo.

Se tutti i coefficienti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono nulli e il termine noto b e' non nullo, allora l'insieme delle soluzioni dell'equazione e' vuoto; se tutti i coefficienti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e il termine noto b sono nulli, allora l'insieme delle soluzioni dell'equazione e' tutto R^n.

Le equazioni lineari in n incognite in cui ci sia almeno un coefficiente a_i non nullo hanno dunque un insieme delle soluzioni che dipende da $n - 1$ parametri reali liberi, e possono essere riguardate come la generalizzazione delle rette nel piano $\mathbb{R}^2$, e dei piani nello spazio $\mathbb{R}^3$.

2. Un *sistema di m equazioni lineari* in n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e' una sequaenza di m equazioni lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

in breve

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

dove $a_{11}, a_{12}, \ldots, b_1, \ldots, a_{mn}, b_m$ sono costanti reali; gli a_{ij} sono i *coefficienti* e i b_i sono i *termini noti* del sistema. Una *soluzione* di questo sistema e' una $n-$pla $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ di numeri reali soluzione di ciscuna equazione del sistema:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}s_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Il sistema si dice

- *impossibile* se non possiede alcuna soluzione;
- *determinato* se possiede una ed una sola soluzione;
- *indeterminato* se possiede piu' di una soluzione.

Vedremo in seguito che un sistema indeterminato in realta' possiede infinite soluzioni.

Diciamo che due sistemi lineari sono *equivalenti* quando hanno lo stesso insieme delle soluzioni.

3. Possiamo rappresentare i dati che caratterizzano il sistema lineare con una matrice avente nelle prima riga i coefficienti e il termine noto della prima equazione, nelle seconda riga i coefficienti e il termine noto della seconda equazione, ...

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

detta *matrice completa* del sistema; nella prima colonna di questa matrice compaiono i coefficienti della prima incognita x_1 nelle varie equazioni, nella seconda colonna di questa matrice compaiono i coefficienti della seconda incognita x_2 nelle varie equazioni, ... nell'ultima colonna di questa matrice compaiono i termini noti delle varie equazioni. La matrice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

viene detta matrice dei coefficienti del sistema.

4. Il metodo di sostituzione per la risoluzione del generico sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

di m equazioni in n incognite puo' essere descritto nel modo seguente:

- Supponiamo che la prima incognita compaia con coefficiente $\neq 0$ in almeno una equazione; eventualmente scambiando le equazioni possiamo pensare che $a_{11} \neq 0$. Allora dalla prima equazione possiamo ricavare l'incognita x_1 in funzione delle rimanenti incognite $x_2, \ldots, x_n$ e nelle equazioni successive sostituire questa espressione ad x_1, cosi' che in queste compaiano solo le incognite $x_2, \ldots, x_n$. Possiamo descrivere il risultato di questa operazione nel modo seguente:

$$\begin{cases} x_1 &= a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \cdots + a'_{1n}x_n + b'_1 \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ \vdots & \vdots \\ a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n &= b'_m \end{cases}.$$

  Abbiamo cosi' ricondotto la risoluzione del sistema dato, di m equazioni in n incognite, alla risoluzione del sistema

$$\begin{cases} a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases},$$

  di $m-1$ equazioni in $n-1$ incognite. Se questo sistema e' impossibile, lo sara' anche il sistema dato. Se questo sistema e' possibile, ad ogni sua soluzione

$$\begin{array}{l} x_2 = s_2 \\ x_3 = s_3 \\ \vdots \\ x_n = s_n \end{array},$$

  corrisponde la soluzione

$$\begin{array}{l} x_1 = a'_{12}s_2 + a'_{13}s_3 + \cdots + a'_{1n}s_n + b'_1 \\ x_2 = t_2 \\ x_3 = t_3 \\ \vdots \\ x_n = t_n \end{array}.$$

  del sistema dato.

  Si ha dunque in questo caso che il sistema dato e' indeterminato, determinato o impossibile se e solo se il sottosistema cui ci si riconduce e' rispettivamente indeterminato, determinato o impossibile.

- Supponiamo che la prima incognita non compaia in alcuna equazione. Abbiamo cosi' in realta' un sistema lineare del tipo

$$\begin{cases} a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

che possiamo riguardare come un sistema di m equazioni in $n-1$ incognite. Se questo sistema e' impossibile, lo sara' anche il sistema dato. Se questo sistema e' possibile, ad ogni sua soluzione

$$\begin{array}{l} x_2 = s_2 \\ x_3 = s_3 \\ \vdots \\ x_n = s_n \end{array},$$

corrispondono le infinite soluzioni

$$\begin{array}{l} x_1 = t \\ x_2 = s_2 \\ x_3 = s_3 \\ \vdots \\ x_n = s_n \end{array}.$$

del sistema dato, dove t e' un parametro reale libero.

Si ha dunque in questo caso che il sistema dato e' indeterminato o impossibile se e solo se il sottosistema e' rispettivamente possibile o impossibile.

5. Un'equazione lineare in cui il termine noto e' nullo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$$

si dice *omogenea.* Una tale equazione possiede sempre la soluzione

$(0, 0, \ldots, 0)$,

che viene detta *soluzione banale* dell'equazione omogenea.

Osserviamo che, se la $n-$pla $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ e' una soluzione di questa equazione e t e' un numero reale, allora anche $n-$pla $(ts_1, ts_2, \ldots, ts_n)$ e' una soluzione di questa equazione; infatti da

$a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = 0$

segue che

$a_1ts_1 + a_2ts_2 + \cdots + a_nts_n = t(a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n) = t \cdot 0 = 0.$

Cio' implica che, se un'equazione lineare omogenea possiede una soluzione non banale, allora possiede infinite soluzioni.

6. Un sistema lineare nel quale tutti i termini noti sono nulli

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

si dice *omogeneo*. Un tale sistema lineare possiede sempre almeno una soluzione: la soluzione banale $(0, 0, \ldots, 0)$; se il sistema possiede una soluzione non banale, allora possiede infinite soluzioni.

7. **Intermezzo. Induzione Matematica.**

Si tratta di un metodo di dimostrazione. Ne diamo una descrizione un po' informale, ma sufficiente per i nostri scopi.

- Partiamo da un problema. Supponiamo di essere interessati a calcolare la somma dei primi 100 numeri dispari:

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + 199.$$

A prima vista cio' sembra molto complicato. Possiamo ampliare il problema alla ricerca di una formula per la somma dei primi n numeri dispari:

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1).$$

Questo e' un compito piu' ambizioso, ma ci permette di considerare assieme ai casi complicati anche i casi piu' semplici. Considerando i primi quattro casi

$1 = 1$

$1 + 3 = 4$

$1 + 3 + 5 = 9$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16$

siamo portati a pensare che la somma dei primi n numeri dispari sia n^2 :

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2.$$

Certamente cio' e' vero nei casi che abbiamo visto e che ce lo hanno suggerito ... ma sara' vero per ogni n?

- **Dimostrazione per induzione.** *Data una famiglia di proposizioni che si possono disporre in una successione*

$$P(1), P(2), P(3), \ldots, P(n), \ldots,$$

dimostrare per induzione che ciascuna di queste proposizioni e' vera significa:

  – *dimostrare che la prima proposizione* $P(1)$ *e' vera, e*

– *per ciascun $n > 1$, assumendo per ipotesi che la proposizione $P(n-1)$ sia vera, dimostrare che la proposizione successiva $P(n)$ e' vera.*

- Nel nostro caso, la proposizione $P(n)$ afferma

$$(\textit{somma dei primi } n \textit{ numeri dispari}) = n^2.$$

La prima proposizione $P(1)$ e' certamente vera.

Ora, per ciascun $n > 1$, assumendo per ipotesi che la proposizione $P(n-1)$ sia vera, dimostriamo che la proposizione successiva $P(n)$ e' vera:

$$\begin{aligned}(\textit{somma dei primi } n \textit{ numeri dispari}) &= \\ (\textit{somma dei primi } n-1 \textit{ numeri dispari}) + (n-\textit{mo numero dispari}) &= \\ (n-1)^2 + 2n - 1 &= \\ n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 &= n^2.\end{aligned}$$

- In particolare, ritornando al problema di partenza, per la somma dei primi 100 numeri dispari si ha:

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + 199 = 100^2 = 10.000.$$

8. L'osservazione dei seguenti fatti:

   - un'equazione omogenea in due incognite e' rappresentata da una retta per l'origine, o dall'intero piano $\mathbb{R}^2$;
   - un'equazione omogenea in tre incognite e' rappresentata da un piano per l'origine, o dall'intero spazio $\mathbb{R}^3$;
   - un sistema di due equazioni omogenee in tre incognite e' rappresentato da una retta per l'origine, da un piano per l'origine, o dall'intero spazio $\mathbb{R}^3$,

   suggerisce la seguente

   Proposizione 1. *Sia dato un sistema lineare omogeneo in certe incognite. Se il numero delle equazioni del sistema e' minore del numero delle incognite, allora il sistema possiede una soluzione non banale, e dunque e' indeterminato.*

   Dim. Diamo una dimostrazione per induzione sul numero m delle equazioni.

   Per $m = 1$ l'enunciato e': una equazione omogenea in $n > 1$ incognite

   $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$

   ha una soluzione non banale. Osserviamo che: se $a_1 = 0$, allora l'equazione possiede la soluzione non banale $(1, 0, 0, \ldots, 0)$; se $a_1 \neq 0$, allora l'equazione possiede la soluzione non banale $(-a_2, a_1, 0, \ldots, 0)$. Cosi' in questo caso $m = 1$ l'enunciato e' vero.

   Sia ora

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}.$$

un sistema lineare omogeneo in n incognite, con $1 < m < n$.

Se x_1 non compare in alcuna equazione, allora il sistema possiede la soluzione non banale $(1, 0, 0, \ldots, 0)$.

Se x_1 compare con coefficiente $\neq 0$ in almeno una equazione, possiamo pensare che $a_{11} \neq 0$, allora dalla prima equazione possiamo ricavare l'incognita x_1 in funzione delle rimanenti incognite $x_2, \ldots, x_n$ e nelle equazioni successive sostituire questa espressione ad x_1, ottenendo un sistema del tipo:

$$\begin{cases} x_1 & = & -a'_{12}x_2 - a'_{13}x_3 - \cdots - a'_{1n}x_n \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}.$$

Consideriamo ora il sistema omogeneo

$$\begin{cases} a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases},$$

di $m - 1$ equazioni in $n - 1$ incognite, ed osserviamo che $m - 1 < n - 1$. Per l'ipotesi di induzione, questo sistema ha una soluzione non banale

$$\begin{array}{l} x_2 = s_2 \\ x_3 = s_3 \\ \vdots \\ x_n = s_n \end{array}.$$

A questa corrisponde la soluzione non banale

$$\begin{array}{l} x_1 = -a'_{12}s_2 - a'_{13}s_3 - \cdots - a'_{1n}s_n \\ x_2 = t_2 \\ x_3 = t_3 \\ \vdots \\ x_n = t_n \end{array}$$

del sitema omogeneo dato. □