Algebra/Algebra Lineare 15.02.08

Metodo di eliminazione di Gauss e sua rappresentazione matriciale. Matrici non singolari.

1. Per risolvere un sistema lineare, il passo elementare del metodo di sostituzione consiste nell'usare la prima equazione per ricavare una certa incognita x_i in funzione delle altre incognite, e sostituire questa espressione per x_i nelle altre equazioni. Si puo' dire che si e' usata la prima equazione per eliminare l'incognita x_i dalle altre equazioni. Lo stesso effetto si puo' ottenere sommando alle altre equazioni opportuni multipli della prima equazione. Questo e' proprio il passo elementare del metodo di eliminazione di Gauss.

   Iniziamo col mostrare il metodo di eliminazione all'opera su sue esempi.

2. **Esempio** Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{array}{lrcl} E & x+2y-3z & = & 2 \\ F & -x-4y+5z & = & 0 \\ G & 2x+6y-7z & = & 0 \end{array}$$

   di tre equazioni E, F, G nelle tre incognite x, y, z.

   - Possiamo usare la prima equazione per eliminare la x dalla seconda equazione, sommando alla seconda equazione la prima equazione:

$$\begin{array}{lrcl} E & x+2y-3z & = & 2 \\ F+E & -2y+2z & = & 2 \\ G & 2x+6y-7z & = & 0 \end{array},$$

     e possiamo usare la prima equazione per eliminare la x dalla terza equazione, sommando alla terza equazione la prima equazione moltiplicata per -2:

$$\begin{array}{lrcr} E & x+2y-3z & = & 2 \\ F & -2y+2z & = & 2 \\ G-2E & 2y-z & = & -4 \end{array};$$

   - Possiamo usare la seconda equazione per eliminare la y dalla terza equazione, sommando alla terza equazione la seconda equazione:

$$\begin{array}{lrcr} E & x+2y-3z & = & 2 \\ F & -2y+2z & = & 2 \\ G+F & z & = & -2 \end{array};$$

     Qui termina il processo di eliminazione; abbiamo ottenuto un sistema di un tipo particolare, che si dice 'triangolare'.

   - Ora possiamo ricavare il valore della z dalla terza equazione:
     $z = -2$,

sostituire questo valore della z nella seconda equazione, e ricavare il valore della y :
$-2y - 4 = 2 \qquad -2y = 6 \qquad y = -3$
sostituire questi valori della z e della y nella prima equazione, e ricavare il valore della x :
$x - 6 + 6 = 2 \qquad x = 2.$

Il sistema e' determinato, ed ha l'unica soluzione

$$(2, -3, -2).$$

3. **Esempio** Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{array}{lrcl} E & x + 2y + 3z & = & 0 \\ F & 4x + 5y + 6z & = & 0 \\ G & 7x + 8y + 9z & = & 0 \end{array}$$

di tre equazioni E, F, G nelle tre incognite x, y, z.

- Possiamo usare la prima equazione per eliminare la x dalla seconda e dalla terza equazione:

$$\begin{array}{lrcl} E & x + 2y + 3z & = & 0 \\ F - 4E & -3y - 6z & = & 0 \; ; \\ G - 7G & -6y - 12z & = & 0 \end{array}$$

- Possiamo usare la seconda equazione per eliminare la y dalla terza equazione:

$$\begin{array}{lrcl} E & x + 2y + 3z & = & 0 \\ F & -3y - 6z & = & 0 \; ; \\ G - 2F & 0 & = & 0 \end{array}$$

abbiamo ottenuto un sistema triangolare 'degenere', in quanto la z non compare nella terza equazione.

- Ora possiamo ricavare dalla seconda equazione il valore della y in funzione della z :
$-3y - 6z = 0 \qquad y = -2z,$
sostituire questa espressione della y nella prima equazione, e ricavare anche la x in funzione della z :
$x - 4z + 3z = 0 \qquad x - z = 0 \qquad x = z.$

Il sistema e' indeterminato, ed ha le infinite soluzioni

$$(t, -2t, t),$$

dipendenti da un parametro reale t.

4. **Operazioni elementari sulle equazioni** I passi elementari del metodo di Gauss sono

- sommare ad una equazione E un multiplo di un'altra equazione F :
  $E := E + kF, \qquad k \in \mathbb{R};$
- moltiplicare un'equazione E per un numero reale non nullo:
  $E := hE, \qquad 0 \neq h \in \mathbb{R};$
- scambiare due equazioni E ed F :
  $E := F; \quad F := E.$

Queste operazioni sono dette 'operazioni elementari sulle equazioni'. Noi abbiamo usato solo la prima, che in realta' e' la piu' importante.

Le operazioni elementari sulle equazioni trasformano un sistema in un sistema equivalente: cambiano il sistema ma lasciano invariato l'insieme delle soluzioni. Verifichiamo questa proprieta' per la prima operazione elementare sui sistemi di due equazioni in due incognite.

Il generico sistema lineare di due equazioni in due incognite x, y si puo descrivere come

$$\begin{cases} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{cases}$$

Sommando alla seconda equazione la prima moltiplicata per il numero reale h si ottiene il nuovo sistema lineare

$$\begin{cases} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y + h\,(a_1x + b_1y) &= c_2 + hc_1 \end{cases}.$$

Ci si puo' rendere conto del fatto che i due sistemi sono equivalenti osservando che sono entrambi equivalenti al sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \\ a_2x + b_2y + h\,(a_1x + b_1y) &= c_2 + hc_1 \end{cases},$$

nel quale la terza equazione e' conseguenza delle prime due, e la seconda equazione e' conseguenza della prima e della terza.

5. Possiamo descrivere il passo elementare del metodo di eliminazione di Gauss, per la risoluzione del generico sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

di m equazioni in n incognite, nel modo seguente.

- Supponiamo che la prima incognita compaia con coefficiente $\neq 0$ in almeno una equazione; eventualmente scambiando le equazioni possiamo pensare che $a_{11} \neq 0$. Allora possiamo eliminare l'incognita x_1 dalla seconda, terza,

..., $m-$ma equazione sommando ad esse opportuni multipli della prima equazione. Otteniamo un nuovo sistema lineare del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad \vdots \\ \qquad a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases},$$

ed equivalente a quello originario.

Abbiamo cosi' ricondotto la risoluzione del sistema dato, di m equazioni in n incognite, alla soluzione del sistema

$$\begin{cases} a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases},$$

di $m-1$ equazioni in $n-1$ incognite. Se questo sistema e' impossibile, lo sara' anche il sistema dato. Se questo sistema e' possibile, ad ogni sua soluzione

$$\begin{array}{l} x_2 = s_2 \\ \vdots \\ x_n = s_n \end{array},$$

corrisponde la soluzione

$$\begin{array}{l} x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}s_2 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}s_n \\ x_2 = s_2 \\ \vdots \\ x_n = s_n \end{array}.$$

del sistema dato.

Si ha dunque in questo caso che il sistema dato e' indeterminato, determinato o impossibile se e solo se il sottosistema e' rispettivamente indeterminato, determinato o impossibile.

- Supponiamo che la prima incognita non compaia in alcuna equazione. Abbiamo cosi' in realta' un sistema lineare del tipo

$$\begin{cases} a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

che possiamo riguardare come un sistema di m equazioni in $n-1$ incognite. Se questo sistema e' impossibile, lo sara' anche il sistema dato. Se questo sistema e' possibile, ad ogni sua soluzione

$$\begin{array}{l} x_2 = s_2 \\ \vdots \\ x_n = s_n \end{array},$$

corrispondono infinite soluzioni

$$\begin{array}{l} x_1 = t \\ x_2 = s_2 \\ \vdots \\ x_n = s_n \end{array}.$$

del sistema dato, dove t e' un parametro reale libero. In questo modo si ottengono tutte le soluzioni del sistema dato.

Si ha dunque in questo caso che il sistema dato e' indeterminato o impossibile secondoche il sottosistema sia possibile o impossibile.

Supponiamo ora che il numero m delle equazioni sia uguale al numero n delle incognite, e consideriamo l'iterazione dei suddetti passi elementari del metodo di eliminazione. Osserviamo che, se si presenta sempre la prima eventualita', allora il processo di iterazione produce un sistema triangolare, cioe' un sistema del tipo

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \cdots + a'_{1,n-1}x_{n-1} + a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2,n-1}x_{n-1} + a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\ & \vdots & \\ a'_{n-1,n-1}x_{n-1} + a'_{n-1,n}x_n & = & b'_{n-1} \\ a'_{nn}x_n & = & b'_n \end{array} \right. ,$$

e non degenere, nel senso che

$a_{11} \neq 0,\ a_{22} \neq 0,\ \ldots, a_{n-1,n-1} \neq 0,\ a_{nn} \neq 0.$

Un tale sistema e' sempre determinato, in quanto l'ultima equazione individua unvocamente il valore dell'incognita x_n, e cosi' la penultima equazione individua unvocamente il valore dell'incognita x_{n-1}, ...

6. Consideriamo di nuovo il sistema del primo esempio, prendendo pero' come termini noti dei parametri

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y - 3z & = & d_1 \\ -x - 4y + 5z & = & d_2 \\ 2x + 6y - 7z & = & d_3 \end{array} \right. ,$$

e ci chiediamo sotto quali condizioni sui parametri il sistema e' determinato, impossibile o indeterminato. Applicando a questo sistema parametrico la sequenza di operazioni elementari che abbiamo applicato nel primo esempio, otterremo un sistema lineare del tipo

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y - 3z & = & d'_1 \\ -2y + 2z & = & d'_2 \\ z & = & d'_3 \end{array} \right. ,$$

dove d'_1, d'_2, d'_3 sono certe espressioni nei parametri d_1, d_2, d_3. Possiamo allora concludere che il sistema dato e' sempre determinato, quasiasi siano i valori dei parametri.

7. Consideriamo di nuovo il sistema del secondo esempio, prendendo pero' come termini noti dei parametri

$$\begin{cases} x+2y+3z &= d_1 \\ 4x+5y+6z &= d_2 \\ 7x+8y+9z &= d_3 \end{cases},$$

e ci chiediamo sotto quali condizioni sui parametri il sistema e' determinato, impossibile o indeterminato. Applicando a questo sistema parametrico la sequenza di operazioni elementari che abbiamo applicato nel secondo esempio, otterremo il sistema lineare

$$\begin{cases} x+2y+3z &= d_1 \\ -3y-6z &= -4d_1+d_2 \\ 0 &= d_1-2d_2+d_3 \end{cases}.$$

Dunque: se $d_1 - 2d_2 + d_3 = 0$, allora il sistema e' indeterminato, altrimenti e' impossibile. Il sistema non e' mai determinato.

8. Data una matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

possiamo considerare tutti i sistemi lineari che hanno A come matrice dei coefficienti

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}.$$

Diciamo, in breve, che ciascuno di questi sistemi e' associato ad A.

Definizione 1. *Diciamo che una matrice quadrata A e' non singolare se tutti i sistemi lineari associati ad A sono determinati.*

Le considerazioni svolte nei punti precedenti portano al seguente risultato

Teorema 1. *Sia A una matrice quadrata. Le seguenti proposizioni sono equivalenti.*

- *tutti i sistemi associati ad A sono determinati, cioe' A e' non singolare;*
- *il sistema omogeneo associato ad A si puo' trasformare in un sistema triangolare non degenere;*
- *il sistema omogeneo associato ad A e' determinato.*

9. Consideriamio il sistema lineare

$$\begin{cases} x+ & y+ & z+ & t & = & 1 \\ 2x+ & 3y+ & 4z+ & 5t & = & 6 \\ 3x+ & 6y+ & 10z+ & 15t & = & 21 \\ 4x+ & 10y+ & 20z+ & 35t & = & 56 \end{cases}$$

nelle incognite x, y, z, t, che ha matrice completa

$$\begin{array}{c} P \\ Q \\ R \\ S \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 10 & 15 & 21 \\ 4 & 10 & 20 & 35 & 56 \end{array}\right].$$

Osserviamo che:

- le operazioni elementari che usano la prima equazione per eliminare x dalle seguenti equazioni si traducono in operazioni che usano la prima riga per annullare il primo elemento nelle seguenti righe:

$$\begin{array}{cc} P & \\ Q & -2P \\ R & -3P \\ S & -4P \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & 12 & 18 \\ 0 & 6 & 16 & 31 & 52 \end{array}\right].$$

- le operazioni elementari che usano la seconda equazione per eliminare y dalle seguenti equazioni si traducono in operazioni che usano la seconda riga per annullare il secondo elemento nelle seguenti righe:

$$\begin{array}{cc} P & \\ Q & \\ R & -3Q \\ S & -4Q \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 13 & 28 \end{array}\right]$$

- l' operazione elementare che usa la terza equazione per eliminare z dall'ultima equazione si traduce nell'operazione che usa la terza riga per annullare il terzo elemento nelle quarta riga:

$$\begin{array}{cc} P & \\ Q & \\ R & \\ S & -4R \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Ora, a questa matrice completa corrisponde il sistema lineare triangolare

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcl} x+ & y+ & z+ & t & = & 1 \\ & y+ & 2z+ & 3t & = & 4 \\ & & z+ & 3t & = & 6 \\ & & & t & = & 4 \end{array} \right. .$$

Il sistema e' dunque determinato, e si puo' risolvere per sostituzione all'indietro a partire dall'ultima equazione.

10. La risoluzione del sistema si puo' ultimare anche continuando ad operare sulla matrice completa nel modo seguente:

- usiamo la quarta riga per eliminare il quarto elemento dalle righe precedenti:

$$\begin{array}{ll} P & -S \\ Q & -3S \\ R & -3S \\ S & \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right];$$

- usiamo la terza riga per eliminare il terzo elemento dalle righe precedenti:

$$\begin{array}{ll} P & -R \\ Q & -2R \\ R & \\ S & \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

- usiamo la seconda riga per eliminare il secondo elemento dalla prima riga:

$$\begin{array}{ll} P & -Q \\ Q & \\ R & \\ S & \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

A questa matrice completa corrisponde il sistema lineare

$$\begin{cases} x & & & & = & -1 \\ & y & & & = & 4 \\ & & z & & = & -6 \\ & & & t & = & 4 \end{cases},$$

che porge direttamente la soluzione

$$(-1, 4, -6, 4).$$

11. **Operazioni elementari sulle righe di una matrice** Alle operazioni elementari sulle equazioni corrispondono le seguenti operazioni elementari sulle righe di una matrice:

    - sommare ad una riga P un multiplo di un'altra riga Q :
      $P := P + kQ, \qquad k \in \mathbb{R};$
    - moltiplicare una riga P per un numero reale non nullo:
      $P := hP, \qquad 0 \neq h \in \mathbb{R};$
    - scambiare due righe P e Q :
      $P := Q; \quad Q := P.$

    Possiamo usare le operazioni elementari sulle righe per operare sulla generica matrice

    $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

    di m righe ed n colonne nel modo seguente.

- Supponiamo che nella prima colonna compaia un elemento $\neq 0$; eventualmente scambiando le righe possiamo pensare che $a_{11} \neq 0$. Allora possiamo eliminare il primo elemento dalla seconda, terza, ..., $m-$ma riga sommando ad esse opportuni multipli della prima riga. Otteniamo una nuova matrice del tipo
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{bmatrix}.$$
Possiamo allora iterare questo passo sulla sottomatrice
$$\begin{bmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{bmatrix}$$
di $m-1$ righe ed $n-1$ colonne.
- Supponiamo che nella prima colonna tutti gli elementi siano nulli:
$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$
Allora possiamo iterare i passi sulla sottomatrice
$$\begin{bmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
di $m-1$ righe ed n colonne.

Supponiamo ora che il numero m delle righe sia uguale al numero n delle colonne, e consideriamo l'iterazione dei suddetti passi elementari. Osserviamo che, se si presenta sempre la prima eventualita', allora il processo di iterazione produce una matrice triangolare superiore, cioe' una matrice del tipo

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1,n-1} & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2,n-1} & a'_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & a'_{n-1,n-1} & a'_{n-1,n} \\ 0 & 0 & & & 0 & a'_{nn} \end{bmatrix},$$

e non degenere, nel senso che

$a'_{11} \neq 0,\ a'_{22} \neq 0,\ \ldots, a'_{n-1,n-1} \neq 0,\ a'_{nn} \neq 0.$

Inoltre, in questo caso, si puo' trasformare la matrice in una matrice del tipo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Questa matrice viene detta *matrice unita' di ordine* n, e viene indicata col simbolo I_n.

Siamo cosi' condotti ad enunciare il seguente

Teorema 2. *Sia A una matrice quadrata. Le seguenti proposizioni sono equivalenti.*

- *A e' non singolare;*
- *A si puo' trasformare in una matrice triangolare superiore non degenere;*
- *A si puo' trasformare in una matrice unita'.*

12. Osserviamo infine che anche la risoluzione del generico sistema associato ad una matrice puo' essere svolta completamente su una matrice. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

e il generico sistema associato ad essa:

$$\begin{cases} x+ & 2y & = & p \\ 3x+ & 5y & = & q \end{cases},$$

dove p e q sono parametri reali.

Possiamo rappresentare questo sistema con la matrice di due righe e quattro colonne che ha nella prima colonna i coefficienti dell'incognita x, nella seconda colonna i coefficienti dell'incognita y, nella terza colonna i coefficienti del parametro p, nella quarta colonna i coefficienti del parametro q :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Operando sulle righe di questa matrice con l'obiettivo di trasformare la sottomatrice A in una matrice unita' otteniamo

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right]$$
$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right]$$
$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right].$$

Ora, a questa matrice corrisponde il sistema parametrico

$$\begin{cases} x &= -5p + 2q \\ y &= 3p - q \end{cases},$$

e questa e' la soluzione generale del sistema dato. In altri termini, la matrice A e' non singolare, tutti i sistemi ad essa associati sono determinati, e per ciascun valore p, q dei termini noti l'unica soluzione e' data da

$$(-5p + 2q, 3p - q).$$