Algebra/Algebra Lineare 18.02.08

Moltiplicazione di matrici

1. In algebra lineare giocano un ruolo importante le coppie, terne, ..., $n-$ple ordinate di numeri reali; cosi' come una coppia ordinata di numeri reali puo' essere pensata come un punto del piano, e una terna ordinata di numeri reali puo' essere pensata come un punto dello spazio, anche una $n-$pla ordinata $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ di numeri reali $a_i \in R$ viene pensata come un'unica entita', ed indicata con un unico simbolo:
$$\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n).$$
Si dice che $a_1, a_2, ...$ sono la prima, seconda, ... componenti di $\underline{a}$. Si scrive anche, piu' brevemente,
$$\underline{a} = (a_j)_{j=1,\ldots,n},$$
o anche $\underline{a} = (a_j)$, quando il numero di componenti e' chiaro dal contesto.
Per ciascun intero positivo n, l'insieme delle $n-$ple ordinate di numeri reali viene indicato con
$$R^n.$$
Risulta utile distinguere due tipi di $n-$ple ordinate di numeri reali: le colonne
$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad a_i \in R;$$
e le righe
$$\underline{a}' = [a_1 \ a_2 \ \ldots \ a_n], \qquad a_i \in R.$$
Le colonne vengono indicate allo stesso modo delle $n-$ple ordinate.

2. Definiamo il prodotto di una riga $\underline{a}'$ di numeri reali per una colonna $\underline{b}$ di numeri reali, aventi lo stesso numero di componenti, come il numero reale ottenuto moltiplicando ciascuna componente di $\underline{a}'$ per la corrispondente componente di $\underline{b}$, e poi sommando. Ad esempio
$$[1 \ 2 \ 3] \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32$$

In generale, si ha

$$\begin{aligned}
\underline{a}'\underline{b} &= [a_1\ a_2\ \ldots\ a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\
&= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_jb_j.
\end{aligned}$$

La moltiplicazione di una riga per una colonna aventi diversi numeri di componenti non viene definita.

Questa operazione puo' essere utilizzata per rappresentare sinteticamente le equazioni lineari. Ad esempio, l'equazione

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$$

puo' essere scritta come

$$[1\ 2\ 3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 4.$$

In generale, l'equazione lineare

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

puo' essere scritta come

$$[a_1\ a_2\ \ldots\ a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b$$

e rappresentata sinteticamente come

$$\underline{a}'\underline{x} = b,$$

dove $\underline{a}'$ e' la riga dei coefficienti e $\underline{x}$ e' la colonna delle incognite.

3. Una tabella di numeri reali viene detta matrice; ciascuna matrice viene pensata come un'unica entita' e viene indicata con una lettere maiuscola; se una matrice A possiede m righe ed n colonne si dice che A ha *tipo* $m \times n$; il numero reale che compare in A nella riga $i-$ma e colonna $j - ma$ viene detto *elemento di posto* (i, j) di A.

   La generica matrice A di tipo $m \times n$ viene rappresentata

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

oppure, piu' brevemente,

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}},$$

o $A = [a_{ij}]$ quando il tipo e' chiaro dal contesto. Si noti che i e j non hanno alcun particolare significato, potrebbero essere sostituiti da altri due simboli, come h e k.

Per ogni coppia di interi positivi m, n, l'insieme delle matrici di numeri reali di tipo $m \times n$ viene indicato con

$$R^{m\times n}.$$

Dunque, l'insieme delle colonne di m numeri reali viene indicato con $R^{m\times 1}$, e l'insieme delle righe di n numeri reali viene indicato con $R^{1\times n}$.

Per indicare che una matrice A ha tipo $m \times n$ si usa scrivere anche

$$\underset{m\times n}{A}.$$

Noi useremo spesso una notazione un po' diversa, suggerita dai linguaggi di alcune applicazioni per il calcolo matriciale come Matlab, o Octave.

Una volta scelto un simbolo, nel nostro caso A, per indicare una matrice, si usa il simbolo $A(i, j)$ per indicare l'elemento di posto (i, j) in A; si usa il simbolo $A(i, :)$ per indicare la riga $i-$ma di A, e si usa il simbolo $A(:, j)$ per indicare la colonna $j-$ma di A.

Ad esempio, per

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix},$$

si ha:

$$A(2,3) = 7, \qquad A(2,:) = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \qquad A(:,3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

La generica matrice $A \in R^{m\times n}$ di tipo $m \times n$ viene rappresentata

$$A = \begin{bmatrix} A(1,1) & A(1,2) & \ldots & A(1,n) \\ A(2,1) & A(2,2) & \ldots & A(2,n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A(m,1) & A(m,2) & \ldots & A(m,n) \end{bmatrix}$$

oppure, piu' brevemente,

$$A:\ A(i,j), \qquad i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n$$

o $A:\ A(i, j)$ quando il tipo e' chiaro dal contesto.

Possiamo rappresentare A mettendo in evidenza le sue righe:

$$A = \begin{bmatrix} A(1,:) \\ A(2,:) \\ \vdots \\ A(m,:) \end{bmatrix}, \qquad A(i,:) \in R^{1\times n},$$

oppure mettendo in evidenza le sue colonne:

$$A = \begin{bmatrix} A(:,1) & A(:,2) & \dots & A(:,n) \end{bmatrix}, \qquad A(:,j) \in R^{m\times 1}.$$

4. Se il numero delle colonne di una matrice A e' uguale al numero delle righe di una matrice B, allora possiamo moltiplicare ciascuna riga di A per ciascuna colonna di B, ed organizzare questi prodotti in una tabella; otteniamo cosi' una matrice detta matrice prodotto (righe per colonne) di A per B, ed indicata con AB.

   Ad esempio, si ha

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c} 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1\cdot 9 + 2\cdot 12 & 1\cdot 10 + 2\cdot 13 & 1\cdot 11 + 2\cdot 14 \\ 3\cdot 9 + 4\cdot 12 & 3\cdot 10 + 4\cdot 13 & 3\cdot 11 + 4\cdot 14 \\ 5\cdot 9 + 6\cdot 12 & 5\cdot 10 + 6\cdot 13 & 5\cdot 11 + 6\cdot 14 \\ 7\cdot 9 + 8\cdot 12 & 7\cdot 10 + 8\cdot 13 & 7\cdot 11 + 8\cdot 14 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 33 & 36 & 39 \\ 75 & 82 & 89 \\ 117 & 128 & 139 \\ 159 & 174 & 189 \end{bmatrix}$$

   In generale, il prodotto di una matrice A di tipo $m \times n$ per una matrice B di tipo $n \times p$ e' la matrice AB di tipo $m \times p$

$$\begin{array}{ccccc} A & \cdot & B & = & AB \\ m\times n & & n\times p & & m\times p \end{array}$$

   data dalla tabella dei prodotti delle m righe di A per le p colonne di B :

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} A(1,:) \\ \\ A(2,:) \\ \vdots \\ A(m,:) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B(:,1) & B(:,2) & \dots & B(:,p) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A(1,:)B(:,1) & A(1,:)B(:,2) & \dots & A(1,:)B(:,p) \\ \\ A(2,:)B(:,1) & A(2,:)B(:,2) & \dots & A(2,:)B(:,p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A(m,:)B(:,1) & A(m,:)B(:,2) & \dots & A(m,:)B(:,p) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Con riferimento agli elementi, posto

$$\begin{array}{lll} A & : & A(i,j), \qquad i=1,\ldots,m;\; j=1,\ldots,n \\ B & : & B(j,h), \qquad j=1,\ldots,n;\; h=1,\ldots,p, \end{array}$$

si ha

$$AB \;:\; (AB)(i,h), \qquad i=1,\ldots,m;\; h=1,\ldots,p,$$

dove

$$\begin{aligned} (AB)(i,h) &= A(i,:)B(:,h) \\ &= \left[\begin{array}{cccc} A(i,1) & A(i,2) & \ldots & A(i,n) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} B(1,h) \\ B(2,h) \\ \vdots \\ B(n,h) \end{array}\right] \\ &= A(i,1)B(1,h) + A(i,2)B(2,h) + \cdots + A(i,n)B(n,h) \\ &= \sum_{j=1}^{n} A(i,j)B(j,h) \end{aligned}$$

5. La moltiplicazione di matrici puo' essere utilizzata per rappresentare sinteticamente i sistemi lineari. Ad esempio, il sistema lineare

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & = & 3 \\ 4x_1 + 5x_2 & = & 6 \\ x_1 + x_2 & = & 0 \end{array} \right. ,$$

cioe'

$$\left[\begin{array}{c} x_1 + 2x_2 \\ 4x_1 + 5x_2 \\ x_1 + x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 3 \\ 6 \\ 0 \end{array}\right],$$

puo' essere scritto come

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 3 \\ 6 \\ 0 \end{array}\right].$$

In generale, il sistema lineare

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

cioe'

$$\left[\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array}\right]$$

puo' essere scritto come

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

e rappresentato sinteticamente come

$$A\underline{x} = \underline{b},$$

dove A e' la matrice di tipo $m \times n$ dei coefficienti, $\underline{x}$ e' la colonna delle n incognite, e $\underline{b}$ e' la colonna degli m termini noti.

6. Le matrici di tipo 1×1 sono numeri reali, ed la moltiplicazione di matrici di tipo 1×1 e' la moltiplicazione di numeri reali.

   Le matrici

$$I_1 = [1], \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \dots, \qquad I_n, \qquad \dots$$

   svolgono il ruolo del numero 1: per ogni matrice A di tipo $m \times n$ si ha

$$I_m A = A = A I_n.$$

   Verifichiamo questa proprieta' per le matrici

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

   di tipo 2×3 :

$$\begin{aligned} I_2 A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot a + 0 \cdot d & 1 \cdot b + 0 \cdot e & 1 \cdot c + 0 \cdot f \\ 0 \cdot a + 1 \cdot d & 0 \cdot b + 1 \cdot e & 0 \cdot c + 1 \cdot f \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = A. \end{aligned}$$

   In modo analogo si verifica che $AI_3 = A$.

7. Date tre matrici A, B, C di tipi rispettivamente $m \times n, n \times p, p \times q$, abbiamo due modi di moltiplicarle per ottenere una matrice, che sara' di tipo $m \times q$:

$$(AB)C, \qquad A(BC).$$

Ad esempio, per $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, e $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, si ha

$$\begin{aligned} (AB)C &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 28 \\ 42 \\ 56 \end{bmatrix} \\ A(BC) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} [14] = \begin{bmatrix} 14 \\ 28 \\ 42 \\ 56 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Quello che abbiamo visto su questo esempio vale in generale. La moltiplicazione di matrici possiede la proprieta' associativa: comunque siano date tre matrici A, B, C di tipi rispettivamente $m \times n, n \times p, p \times q$, si ha

$$(AB)C = A(BC).$$

Potremo cosi' scrivere un prodotto di piu' matrici senza usare parentesi.

Il prodotto di tre matrici

$$\begin{array}{lcll} A & : & A(i,j), & i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n \\ B & : & B(j,h), & j = 1, \ldots, n; \; h = 1, \ldots, p, \\ C & : & C(h,l), & h = 1, \ldots, p; \; l = 1, \ldots, q, \end{array}$$

puo' essere descritto nel modo seguente:

$$ABC \quad : \quad (ABC)\,(i,l), \qquad i = 1, \ldots, m; \; l = 1, \ldots, q,$$

dove

$$(ABC)\,(i,l) = \sum_{\substack{j=1,\ldots,n \\ h=1,\ldots,p}} A(i,j)B(j,h)C(h,l).$$

8. Sappiamo che il prodotto di due numeri reali non cambia invertendo l'ordine dei fattori, cioe' la moltiplicazione di numeri reali possiede la proprieta' commutativa. Ci chiediamo se questa proprieta' vale in qualche modo per la moltiplicazione di matrici.

   Esempi

   - $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}$,

     $\begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad non\ e'\ definito;$

- $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$,

  $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 11;$
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 2q \\ 3p & 4q \end{bmatrix}$,

  $\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 2p \\ 3q & 4q \end{bmatrix}$.

Date due matrici A e B, puo' succedere che esista il prodotto AB ma non esista il prodotto BA, puo' succedere che esistano entrambi i prodotti AB e BA ma abbiano tipi diversi, e puo' succedere che esistano entrambi i prodotti AB e BA dello stesso tipo, ma $AB \neq BA$. La moltiplicazione di matrici dunque non possiede la proprieta' commutativa.

9. La moltiplicazione di matrici puo' essere utilizzata per rappresentare sinteticamente piu' sistemi lineari in incognite diverse ma aventi la stessa matrice dei coefficienti. Ad esempio, i sistemi lineari

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 &= 10 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 11 \\ 5x_1 + 6x_2 &= 12 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y_1 + 2y_2 &= 13 \\ 3y_1 + 4y_2 &= 14 \\ 5y_1 + 6y_2 &= 15 \end{cases},$$

cioe'

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 & y_1 + 2y_2 \\ 3x_1 + 4x_2 & 3y_1 + 4y_2 \\ 5x_1 + 6x_2 & 5y_1 + 6y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 13 \\ 11 & 14 \\ 12 & 15 \end{bmatrix},$$

possono essere scritti come

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 13 \\ 11 & 14 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}.$$

I calcoli necessari per la risoluzione dei due sistemi lineari possono essere convenientemente svolti sulla matrice

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 10 & 13 \\ 3 & 4 & 11 & 14 \\ 5 & 6 & 12 & 15 \end{array}\right]$$

ottenuta affiancando la matrice dei coefficienti e la matrice dei termini noti.

In generale, piu' sistemi lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_{1h} + a_{12}x_{2h} + \cdots + a_{1n}x_{nh} &= b_{1h} \\ a_{21}x_{1h} + a_{22}x_{2h} + \cdots + a_{2n}x_{nh} &= b_{2h} \\ & \vdots \\ a_{m1}x_{1h} + a_{m2}x_{2h} + \cdots + a_{mn}x_{nh} &= b_{mh} \end{cases} \qquad h = 1, 2, \ldots, p$$

possono essere scritti come

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & \dots & x_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & \dots & a_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & \dots & a_{mp} \end{bmatrix}$$

e rappresentati sinteticamente come

$$AX = B,$$

dove A e' la matrice di tipo $m \times n$ dei coefficienti, X e' la matrice di tipo $n \times p$ nelle cui colonne compaiono le colonne delle incognite dei vari sistemi lineari, e B e' la matrice di tipo $m \times p$ nelle cui colonne compaiono le colonne dei termini noti dei vari sistemi lineari.

I calcoli necessari per la risoluzione dei sistemi lineari possono essere convenientemente svolti sulla matrice

$$\left[\, A \mid B \, \right]$$

ottenuta affiancando la matrice dei coefficienti e la matrice dei termini noti.