Algebra/Algebra Lineare 20.02.08

Matrice inversa

1. Per $n = 1$, l'insieme $\mathbb{R}^{n\times n}$ delle matrici quadrate di ordine n diventa l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, e la moltiplicazione di matrici diventa la moltiplicazione di numeri reali.

   In $\mathbb{R}$, il numero 1 e' caratterizzato dalla proprieta' che il prodotto di 1 per un qualsiasi altro numero reale e' uguale a quell'altro numero reale:

   $1\ a = a = a\ 1, \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$

   L'inverso a^{-1} di un numero reale non nullo a e' caratterizzato dalla proprieta' che il prodotto del numero reale per il suo inverso e' uguale a 1:

   $a\ a^{-1} = 1 = a^{-1}\ a.$

   Un'equazione lineare

   $ax = b$

   nell'incognita reale x e' determinata se e solo se $a \neq 0$, e in tal caso l'unica soluzione si ottiene moltiplicando entrambi i membri per a^{-1} :

   $a^{-1}ax = a^{-1}b; \qquad 1x = a^{-1}b; \qquad x = a^{-1}b.$

   In questa lezione vedremo come queste nozioni e questi fatti si estendono al caso delle matrici quadrate di un qualsiasi ordine $n \geq 1$.

2. **Matrice inversa**

   Definizione *Sia A una matrice quadrata di ordine n. Una matrice B quadrata di ordine n si dice inversa di A se sia moltiplicando A per B a destra che moltiplicando A per B a sinistra si ottiene la matrice I_n unita' di ordine n :*

   $$AB = I_n = BA.$$

   In tal caso, si dice che A e' invertibile.

   Sia A una matrice quadrate di ordine n. Se una matrice B quadrata di ordine n si comporta da inversa sulla destra di A e se una matrice C quadrata di ordine n si comporta da inversa sulla sinistra di A, allora queste due matrici coincidono; infatti

   $$C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_nB = B.$$

   Dunque se A possiede un'inversa, questa e' unica; essa viene detta *la* matrice inversa di A, e viene denotata con

   $$A^{-1}.$$

   Di seguito si riportano un paio di esempi. Nella discussione del primo si usa il seguente fatto, accennato alla fine della lezione precedente:

- Siano date una equazione matriciale
  $AX = B$
  nella incognita matriciale X in $\mathbb{R}^{m \times n}$, e si consideri la matrice
  $[A|B]$
  ottenuta affiancando alla matrice coefficiente A la matrice termine noto B. Se questa matrice viene trasformata, mediante operazioni elementari per righe, nella matrice
  $[P|Q]$,
  allora l'equazione matriciale corrispondente
  $PX = Q$
  ha le stesse soluzioni dell'equazione matriciale data.

Nella discussione del secondo esempio si adotta un approccio piu' ingenuo. Per esercizio, si consiglia di ridiscutere gli esempi scambiando gli approcci.

Esempio. Chiedersi se la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

possiede una inversa destra significa chiedersi se esiste una matrice

$$\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$$

tale che

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

I dati che caratterizzano questa equazione matriciale sono sintetizzati dalla matrice

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ottenuta affiancando la matrice coefficiente e la matrice termine noto.

Con una operazione elementare sulle righe possiamo trasformare questa matrice in modo che nel blocco di sinistra compaia una matrice triangolare superiore:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right];$$

poiche' il blocco di sinistra e' una matrice triangolare non degenere, possiamo trasformare questo blocco nella matrice unita' I_2 :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1.5 & -0.5 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1.5 & -0.5 \end{array}\right]$$

A questa matrice corrisponde l'equazione matriciale

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix};$$

abbiamo cosi' che

$$\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

e' un'inversa destra di A.

Poiche'

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

la matrice trovata e' anche un'inversa sinistra di A.

Dunque abbiamo che A e' invertibile e la sua inversa e'

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

Esempio. Chiedersi se la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

possiede una inversa destra significa chedersi se esiste una matrice

$$\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$$

tale che

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

cioe'

$$\begin{cases} p + 2q = 1 \\ r + 2s = 0 \\ 3p + 6q = 0 \\ 3r + 6s = 1 \end{cases}.$$

Ora, la prima e la terza equazione di questo sistema sono incompatibili. Dunque A non possiede alcuna inversa destra, e a maggior ragione non possiede alcuna inversa.

3. Le matrici invertibili sono non singolari

Teorema 1. *Se una matrice A quadrata di ordine n possiede inversa, allora ciascun sistema lineare di n equazioni in n incognite*

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

con matrice dei coefficienti A e' determinato; inoltre, la sua unica soluzione e' data da

$$\underline{x} = A^{-1}\underline{b}.$$

Dimostrazione. Dal fatto che A^{-1} e' inversa sinistra di A, ricaviamo

$$\begin{array}{rcl} A\underline{x} & = & \underline{b} \\ A^{-1}\left(A\underline{x}\right) & = & A^{-1}\underline{b} \\ \left(A^{-1}A\right)\underline{x} & = & A^{-1}\underline{b} \\ I_n\underline{x} & = & A^{-1}\underline{b} \\ \underline{x} & = & A^{-1}\underline{b} \end{array}$$

. Usando il fatto che A^{-1} e' inversa destra di A, mostriamo che questa e' davvero una soluzione:

$$A\left(A^{-1}\underline{b}\right) = \left(AA^{-1}\right)\underline{b} = I_n\underline{b} = \underline{b}.$$

cvd

Applicazione.

Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = b_1 \\ 3x_1 + 4x_2 = b_2 \end{cases},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

$A\underline{x} = \underline{b}$

dove b_1, b_2 sono termini noti arbitrari.

Sapendo che la matrice dei coefficienti

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

possiede inversa

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix},$$

si ha che il sistema lineare e' determinato, ed ha come unica soluzione

$\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & -2b_1 + b_2 \\ x_2 & = & 1.5b_1 - 0.5b_2 \end{array}.$$

4. **Le matrici non singolari sono invertibili**

Teorema 2. *Se una matrice quadrata A e' non singolare, allora A e' invertibile.*

Dimostrazione. Sia A quadrata di ordine n, nonsingolare. Proviamo soltanto che A possiede un'inversa destra. Consideriamo l'equazione matriciale

$$AX = I_n$$

nella matrice incognita X quadrata di ordine n, e consideriamo la matrice

$$[A|I_n]$$

ottenuta affiancando alla matrice coefficiente A la matrice termine noto I_n.

Per le proprieta' delle matrici non singolari, la matrice A puo' essere trasformata, mediante operazioni elementari per righe, nella matrice unita' I_n.

Ora, applicando queste stesse operazioni elementari alle righe della matrice $[A|I_n]$, si ottiene una matrice della forma

$$[I_n|B],$$

cui corrisponde l'equazione matriciale

$$I_nX = B, \qquad X = B,$$

che ha le stesse soluzioni dell'equazione matriciale considerata. Dunque B e' un'inversa destra di A. Si puo' provare che A possiede anche una inversa sinistra, cosi' si ottiene che che A e' invertibile e B e' la sua inversa:

$$B = A^{-1}.$$

cvd

Illustrazione Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Affiancando ad A la matrice unita' I_3 otteniamo:

$$\left[\ A \mid I_3\ \right] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Operando operazioni elementari per righe, possiamo trasformato la matrice il blocco si sinistra in una matrice triangolare superiore

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Osserviamo che, in realta', abbiamo trasformato il blocco di siistra in una matrice triangolare superiore non degenere, e possiamo affermare che A possiede inversa.

Possiamo proseguire e trasformare il blocco di sinistra nelle matrice unita', ottenendo

$$
\left[\; I_3 \;\middle|\; B \;\right] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right].
$$

Dunque A possiede inversa

$$
A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.
$$

5. **Autovettori e Autovalori**

   Una matrice A quadrata di ordine n puo' essere riguardata come un operatore da $R^{n\times 1}$ in se, che agisce su ogni $\underline{v}$ come premoltiplicazione:

$$
\begin{aligned} A:\ \mathbb{R}^{n\times 1} &\to \mathbb{R}^{n\times 1} \\ \underline{v} &\mapsto A\underline{v}. \end{aligned}
$$

   Le matrici quadrate diagonali agiscono in un modo particolarmente semplice, poiche' trasformano ogni componente indipendentemente dalle altre. Allora, si cerca di ricondurre lo studio delle matrici quadrate, per quanto possibile, allo studio delle matrici diagonali.

6. Una matrice quadrata, come

$$
\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix},
$$

   nella quale tutti gli elementi fuori dalla diagonale sono nulli, viene detta *matrice diagonale.* Possiamo rappresentare una qualsiasi matrice diagonale di ordine n come

$$
D = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix},
$$

   scrivendo solo gli elementi sulla diagonale.

   Si verifica che premoltiplicare una matrice A per una matrice diagonale D ha lo stesso effetto di moltiplicare ciscuna riga di A per il corrispondente elemento diagonale di D :

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(1,:) \\ \hline A(2,:) \\ \hline \vdots \\ \hline A(n,:) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1A(1,:) \\ \hline a_2A(2,:) \\ \hline \vdots \\ \hline a_nA(n,:) \end{bmatrix}$$

Si verifica che postmoltiplicare una matrice A per una matrice diagonale D ha lo stesso effetto di moltiplicare ciscuna colonna di A per il corrispondente elemento diagonale di D :

$$\left[\begin{array}{c|c|c} A(:,1) & A(:,2) & \ldots \quad A(:,n) \end{array}\right] \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} a_1A(:,1) & a_2A(:,2) & \ldots \quad a_nA(:,n) \end{array}\right]$$

In particolare, il prodotto di due matrici diagonali e' una matrice diagonale, e gli elementi diagonali della matrice prodotto sono i prodotti degli elementi corrispondenti delle due matrici fattori:

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & & & \\ & a_2b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_nb_n \end{bmatrix}$$

Piu' in particolare, la potenza $t-$ma di una matrice diagonale e' una matrice diagonale, e gli elementi diagonali della matrice potenza $t-$ma sono le potenza $t-$ma degli elementi della matrice:

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a_1^t & & & \\ & a_2^t & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^t \end{bmatrix}$$

7. Mostriamo ora su un esempio come il calcolo delle potenze di una matrice non diagonale possa essere ricondotto al calcolo delle potenze di una opportuna matrice diagonale.

   Sia data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}.$$
   Ci sono delle colonne sulle quali A agisce in modo particolarmente semplice: una e'
   $\underline{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$,
   in quanto
$$A\underline{u} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{u};$$
   un'altra e'
   $\underline{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$,
   in quanto
$$A\underline{v} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 0.5\ \underline{v}.$$
   In entrambi i casi, A agisce come la moltiplicazione per un numero reale:
$$A\underline{u} = \underline{u}, \qquad A\underline{v} = 0.5\ \underline{v}.$$
   Osserviamo che
$$\begin{aligned} A \left[\ \underline{u} \mid \underline{v}\ \right] &= \left[\ A\underline{u} \mid A\underline{v}\ \right] \\ &= \left[\ \underline{u} \mid 0.5\ \underline{v}\ \right] \\ &= \left[\ \underline{u} \mid \underline{v}\ \right] \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$
   Posto
$$P = \left[\ \underline{u} \mid \underline{v}\ \right], \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0.5 \end{bmatrix},$$
   possiamo riscrivere la relazione trovata come
$$AP = PD.$$

Ora, capita che la matrice

$$P = [\ \underline{u} \mid \underline{v}\ ] = \left[\begin{array}{r|r} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{array}\right]$$

possiede inversa. Dunque possiamo ricavare A in funzione di P e D :

$$A = PDP^{-1}.$$

Possiamo allora ricondurre il calcolo delle potenze di A al calcolo delle potenze di D :

$$\begin{array}{rcl} A & = & PDP^{-1} \\ A^2 & = & PDP^{-1}PDP^{-1} = \ PD^2P^{-1} \\ A^3 & = & PDP^{-1}PD^2P^{-1} = PD^3P^{-1} \\ \vdots & & \\ A^t & = & PDP^{-1}PD^{t-1}P^{-1} = PD^tP^{-1} \\ \vdots & & \end{array}$$

Cosi' abbiamo

$$\begin{aligned} A^t &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0.5 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & (0.5)^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ -0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \\ &= ... \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} lim_{t\to\infty} A^t &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ -0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

8. In generale, data una matrice A quadrata di ordine n, possiamo cercare delle colonne sulle quali A agisce in modo particolarmente semplice ...

   Definizione *Se la matrice A agisce su una colonna non nulla $\underline{v} \in R^{n\times 1}$ come la moltiplicazione per un numero reale λ*

   $$A\underline{v} = \lambda\underline{v},$$

   allora si dice che $\underline{v} \in R^{n\times 1}$ e' un autovettore di A e che λ e' un autovalore di A.

Se la matrice A possiede n autovettori [1] $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$, con rispettivi autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, cioe'

$$A\underline{v}_1 = \lambda_1\underline{v}_1, \quad A\underline{v}_2 = \lambda_2\underline{v}_2, \quad \ldots \quad A\underline{v}_n = \lambda_n\underline{v}_n,$$

allora si ha

$$\begin{aligned} A\left[\ \underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \ldots \ \ \underline{v}_n\ \right] &= \left[\ A\underline{v}_1 \mid A\underline{v}_2 \mid \ldots \ \ A\underline{v}_n\ \right] \\ &= \left[\ \lambda_1\underline{v}_1 \mid \lambda_2\underline{v}_2 \mid \ldots \ \ \lambda_n\underline{v}_n\ \right] \\ &= \left[\ \underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \ldots \ \ \underline{v}_n\ \right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Indichiamo con P

$$P = \left[\ \underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \ldots \ \ \underline{v}_n\ \right]$$

la matrice avente come colonne gli n autovettori $\underline{v}_i$, ed indichiamo con D

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

la matrice diagonale con elementi diagonali i corrispondenti autovalori λ_i.
Cosi' possiamo riscrivere la relazione trovata come

$$AP = PD.$$

Se capita che la matrice

$$P = \left[\ \underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \ldots \ \ \underline{v}_n\ \right]$$

avente come colonne gli n autovettori possiede inversa, [2] allora possiamo ricavare A in funzione di P e D :

$$A = PDP^{-1}.$$

Possiamo allora ricondurre il calcolo delle potenze di A al calcolo delle potenze di D :

$$A^t = PD^tP^{-1}.$$

[1] potrebbe non possederne alcuno.
[2] potrebbe non esistere alcuna matrice invertibile con colonne autovettori.