Algebra/Algebra Lineare 25.02.08

1. Cosiderata la generica matrice A quadrata di ordine n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

ci chiediamo sotto quali condizioni sui parametri a_{ij} succede A e' non singolare, cioe' che tutti i sistemi lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{cases},$$

con matrice dei coefficienti A sono determinati, o, equivalentemente, succede che il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n &= 0 \end{cases},$$

con matrice dei coefficienti A possiede solo la soluzione banale $x_1 = \dots = x_n = 0$.

Da un altro punto di vista, possiamo dire che ci chiediamo sotto quali condizioni sui parametri a_{ij} succede che A e' invertibile.

2. Per $n = 1$, la generica matrice quadrata di ordine 1 consiste di un solo elemento

$A = [a]$,

e l'equazione lineare omogenea

$ax = 0$

con coefficiente a ha l'unica soluzione $x = 0$ se e solo se $a \neq 0$.

3. Per $n = 2$, considerariamo la generica matrice quadrata del secondo ordine

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

e ci chiediamo sotto quali condizioni sui parametri a, b, c, d succede che il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

con matrice dei coefficienti A ha solo la soluzione banale $x = y = 0$.

Osserviamo che possiamo combinare linearmente le due equazioni in modo da ottenere una nuova equazione che non contenga l'incognita y :

$$\begin{aligned} (ax + by)d - (cx + dy)b &= 0 \\ (ad - cb)x &= 0, \end{aligned}$$

e possiamo combinare linearmente le due equazioni in modo da ottenere una nuova equazione che non contenga l'incognita x :

$$\begin{aligned}(ax+by)c-(cx+dy)a &= 0\\ (bc-da)y &= 0.\end{aligned}$$

Possiamo allora osservare che, se

$$ad-cb\neq 0,$$

allora il sistema lineare omogeneo ha solo la soluzione banale $x=y=0$. Vale anche il viceversa.

4. Definiamo il determinante $DetA$ della generica matrice A quadrata del secondo ordine ponendo:

$$DetA = Det\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix} = ad-cb.$$

Si osservi che

$$DetA^T = DetA.$$

Possiamo allora riformulare cio' che abbiamo provato nel punto precedente dicendo che, per ogni matrice A quadrata del secondo ordine,

- *A e' non singolare o, equivalentemente, A e' invertibile, se e solo se*

$$DetA\neq 0.$$

5. Possiamo parametrizzare una matrice del secondo ordine con 4 numeri in $\mathbb{R}$, ma anche con 2 vettori colonna in $\mathbb{R}^{2\times 1}$:

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b\end{bmatrix}, \qquad a_i,b_i\in\mathbb{R},\quad a,b\in\mathbb{R}^{2\times 1}.$$

Siamo cosi' condotti a riguardare il determinante di una matrice del secondo ordine come una funzione di due variabili in $\mathbb{R}^{2\times 1}$:

$$DetA = Det\begin{bmatrix} a & b\end{bmatrix}, \qquad a,b\in\mathbb{R}^{2\times 1}.$$

In quest'ottica, il determinante del secondo ordine e' caratterizzato dalle seguenti proprieta':

$$\begin{aligned}
Det\begin{bmatrix} ra & b\end{bmatrix} &= rDet\begin{bmatrix} a & b\end{bmatrix}\\
Det\begin{bmatrix} a & rb\end{bmatrix} &= rDet\begin{bmatrix} a & b\end{bmatrix}\\
Det\begin{bmatrix} a+b & c\end{bmatrix} &= Det\begin{bmatrix} a & c\end{bmatrix} + Det\begin{bmatrix} b & c\end{bmatrix}\\
Det\begin{bmatrix} a & b+c\end{bmatrix} &= Det\begin{bmatrix} a & b\end{bmatrix} + Det\begin{bmatrix} a & c\end{bmatrix}\\
Det\begin{bmatrix} a & a\end{bmatrix} &= 0\\
Det\begin{bmatrix} a & b\end{bmatrix} &= -Det\begin{bmatrix} b & a\end{bmatrix}\\
Det\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} &= 1
\end{aligned}$$

per ogni a, b, c vettori colonna in $\mathbb{R}^{2\times 1}$ ed ogni scalare r in $\mathbb{R}$.

Ad esempio, la prima proprieta' si puo' verificare cosi':

$$\begin{aligned} Det \left[\begin{array}{cc} ra & b \end{array} \right] &= Det \left[\begin{array}{cc} ra_1 & b_1 \\ ra_2 & b_2 \end{array} \right] \\ &= ra_1 b_2 - ra_2 b_1 = r\,(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ &= r Det \left[\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \right] \\ &= r Det \left[\begin{array}{cc} a & b \end{array} \right]. \end{aligned}$$

La terzultima proprieta' si verica immediatamente:

$$Det \left[\begin{array}{cc} a & a \end{array} \right] = Det \left[\begin{array}{cc} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{array} \right] = a_1 a_2 - a_2 a_1 = 0.$$

6. Data la generica matrice A del secondo ordine

$$A = \left[\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} a & b \end{array} \right],$$

consideriamo il generico sistema lineare che ammette A come matrice dei coefficienti

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 x + b_1 x_2 = c_1 \\ a_2 x + b_2 x_2 = c_2 \end{array} \right. ,$$

che possiamo riscrivere come

$$\left[\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} \right] x_1 + \left[\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \end{array} \right] x_2 = \left[\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \end{array} \right]$$

e sintetizzare nella forma

$$a x_1 + b x_2 = c, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}^{2\times 1}.$$

Osserviamo che una soluzione del sistema deve essere anche una soluzione dell'equazione

$$Det \left[\begin{array}{cc} a x_1 + b x_2 & b \end{array} \right] = Det \left[\begin{array}{cc} c & b \end{array} \right];$$

Ora, al primo membro si ha

$$\begin{aligned} Det \left[\begin{array}{cc} a x_1 + b x_2 & b \end{array} \right] &= Det \left[\begin{array}{cc} a x_1 & b \end{array} \right] + Det \left[\begin{array}{cc} b x_2 & b \end{array} \right] \\ &= x_1 Det \left[\begin{array}{cc} a & b \end{array} \right] + x_2 Det \left[\begin{array}{cc} b & b \end{array} \right] \\ &= x_1 Det \left[\begin{array}{cc} a & b \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Abbiamo cosi' ottenuto l'equazione nella sola incognita x_1

$$x_1 Det \left[\begin{array}{cc} a & b \end{array} \right] = Det \left[\begin{array}{cc} c & b \end{array} \right],$$

e in modo analogo possiamo ottenere l'equazione nella sola incognita x_2

$$x_2 Det\left[\begin{array}{cc} a & b \end{array}\right] = Det\left[\begin{array}{cc} a & c \end{array}\right].$$

Se $DetA \neq 0$, allora possiamo ricavare univocamente entrambe le incognite, ed ottenere

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{Det\left[\begin{array}{cc} c & b \end{array}\right]}{Det\left[\begin{array}{cc} a & b \end{array}\right]} \\ x_2 &= \frac{Det\left[\begin{array}{cc} a & c \end{array}\right]}{Det\left[\begin{array}{cc} a & b \end{array}\right]}. \end{aligned}$$

Questa e' la *regola di Cramer* per la soluzione dei sistemi del secondo ordine con matrice dei coefficienti non singolare.

Consideriamo, ad esempio, il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases},$$

che possiamo riscrivere come

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Il determinate della matrice dei coefficienti e'

$$Det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = 1 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = -3,$$

dunque il sistema e' determinato, e la dua soluzione e' data da

$$\begin{aligned} x &= \frac{Det\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}}{Det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}} = \frac{3}{-3} = -1 \\ y &= \frac{Det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}}{Det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}} = \frac{-6}{-3} = 2. \end{aligned}$$

7. Il determinante di una matrice quadrata del terzo ordine puo' essere definito come il risultato comune di sei espressioni, una per ciascuna colonna e una per ciascuna riga della matrice, dette *sviluppi di Laplace* del determinate. Ad esempio, per la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

si hanno i seguenti sviluppi di Laplace del determinante di A per colonne:

- uno secondo la prima colonna, dato da

$$1 \cdot Det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} - 4 \cdot Det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} + 7 \cdot Det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= 5 \cdot 10 - 8 \cdot 6 - 4(2 \cdot 10 - 8 \cdot 3) + 7(2 \cdot 6 - 5 \cdot 3) = -3$$

- uno secondo la seconda colonna, dato da

$$-2 \cdot Det \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} + 5 \cdot Det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} - 8 \cdot Det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= -2(4 \cdot 10 - 7 \cdot 6) + 5(1 \cdot 10 - 7 \cdot 3) - 8(1 \cdot 6 - 4 \cdot 3) = -3$$

- uno secondo la terza colonna, dato da

$$3 \cdot Det \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} - 6 \cdot Det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} + 10 \cdot Det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= 3(4 \cdot 8 - 7 \cdot 5) - 6(1 \cdot 8 - 7 \cdot 2) + 10(1 \cdot 5 - 4 \cdot 2) = -3$$

8. Consideriamo la generica matrice quadrata del terzo ordine

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Lo sviluppo di Laplace del determinate di A secondo la prima colonna e'

$$a_1 \cdot Det \begin{bmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix} - a_2 \cdot Det \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix} + a_3 \cdot Det \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_1c_2.$$

Abbiamo ottenuto un polinomio omogeneo di terzo grado nei 9 parametri che descrivono la matrice, e in questo polinomio compaiono 6 termini del tipo

$$a_hb_ic_j,$$

dove le terne (i, j, h) variano fra le permutazioni della terna $(1, 2, 3)$.

Lo stesso polinomio si ottine da ciascuno degli altri sviluppi di Laplace, e cosi' poniamo

$$DEtA = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_1c_2.$$

9. Possiamo parametrizzare una matrice del terzo ordine con 9 numeri in $\mathbb{R}$, ma anche con 3 vettori colonna in $\mathbb{R}^{3\times 1}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}, \qquad a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^{3\times 1}.$$

Siamo cosi' condotti a riguardare il determinante di una matrice del terzo ordine come una funzione di tre variabili in $\mathbb{R}^{3\times 1}$:

$$DetA = Det \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}^{3\times 1}.$$

In quest'ottica, il determinante del terzo ordine e' caratterizzato dalle seguenti proprieta':

$$\begin{aligned}
Det \begin{bmatrix} ra & b & c \end{bmatrix} &= rDet \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \\
Det \begin{bmatrix} a & rb & c \end{bmatrix} &= rDet \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \\
Det \begin{bmatrix} a & b & rc \end{bmatrix} &= rDet \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \\
Det \begin{bmatrix} a+b & c & d \end{bmatrix} &= Det \begin{bmatrix} a & c & d \end{bmatrix} + Det \begin{bmatrix} b & c & d \end{bmatrix} \\
Det \begin{bmatrix} a & b+c & d \end{bmatrix} &= Det \begin{bmatrix} a & b & d \end{bmatrix} + Det \begin{bmatrix} a & c & d \end{bmatrix} \\
Det \begin{bmatrix} a & b & c+d \end{bmatrix} &= Det \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} + Det \begin{bmatrix} a & b & d \end{bmatrix} \\
Det \begin{bmatrix} a & a & b \end{bmatrix} &= 0 \\
Det \begin{bmatrix} a & b & b \end{bmatrix} &= 0 \\
Det \begin{bmatrix} a & b & a \end{bmatrix} &= 0 \\
Det \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} &= -Det \begin{bmatrix} b & a & c \end{bmatrix} \\
Det \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} &= -Det \begin{bmatrix} c & b & a \end{bmatrix} \\
Det \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} &= -Det \begin{bmatrix} a & c & b \end{bmatrix} \\
Det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= 1
\end{aligned}$$

per ogni a, b, c, d vettori colonna in $\mathbb{R}^{3\times 1}$ ed ogni scalare r in $\mathbb{R}$.

10. Si possono usare le proprieta' dei determinanti del terzo ordine per ricavare la *regola di Cramer* per la soluzione del generico sistema lineare del terzo ordine

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}^{3\times 1},$$

sotto la condizione

$$Det \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \neq 0.$$

Precisamente, si ha

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{Det \begin{bmatrix} d & b & c \end{bmatrix}}{Det \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}} \\
x_2 &= \frac{Det \begin{bmatrix} a & d & c \end{bmatrix}}{Det \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}} \\
x_3 &= \frac{Det \begin{bmatrix} a & b & d \end{bmatrix}}{Det \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}}.
\end{aligned}$$

Dai conti che conducono alla regola di Cramer si puo' ricavare che, per ogni matrice A quadrata del terzo ordine,

- *A e' non singolare o, equivalentemente, A e' invertibile, se e solo se*

$$DetA \neq 0.$$