Algebra/Algebra Lineare 27.02.08

Determinanti di ordine n

1. D'ora innanzi, invece di "matrice quadrata di tipo $n \times n$" diremo "matrice quadrata di ordine n", o anche "matrice di ordine n."

   Introduciamo innanzitutto alcuni termini e alcune notazioni.

   Sia A la generica matrice di ordine n. Per ciascuna scelta di un indice di riga

   $i = 1, \ldots, n$

   e di un indice di colonna

   $j = 1, \ldots, n,$

   consideriamo due numeri reali.

   - Intersechiamo la riga $i-$ma e la colonna $j-$ma di A

     $$\begin{array}{cccccc} & & & & j & \\ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ i & \circ & \circ & \circ & \bullet & \circ \\ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{array},$$

     ed otteniamo un numero reale, l'elemento

     $$A(i,j)$$

     di posto (i,j) in A.
   - Eliminiamo la riga $i-$ma e la colonna $j-$ma di A

     $$\begin{array}{cccccc} & & & & j & \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \circ & \bullet \\ i & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \circ & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \circ & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \circ & \bullet \end{array},$$

     ottenendo cosi' una matrice quadrata di ordine $n-1$, che indichiamo con

     $$A(\hat{i}, \hat{j})$$

     per la quale supponiamo di avere gia' definito il determinante. Prendiamo questo determinante col suo segno o segno opposto, secondo che la somma $i+j$ sia pari o dispari; otteniamo cosi' un numero reale, il *complemento algebrico*

     $$(-1)^{i+j} Det A(\hat{i}, \hat{j})$$

     di posto (i,j) della atrice A.

Useremo il termine "linea" per indicare una "riga" o una "colonna" di una matrice, e useremo l'espressione "due linee parallele" per indicare "due righe" o "due colonne".

Definiamo il determinante di una matrice quadrata di un qualsiasi ordine n in modo ricorsivo: definiamo il determinate $DetA$ di una matrice di ordine 1; per $n > 1$, supponiamo di avere definito il determinante per una qualsiasi matrice di ordine $n-1$, e definiamo il determinante per una qualsiasi matrice di ordine n.

- per ogni matrice A di ordine 1, poniamo

$$Det\ A \ = \ \textit{unico elemento di } A;$$

- per ogni matrice A di ordine > 1, poniamo

$$Det\ A \ = \ \begin{array}{l} \textit{somma dei prodotti degli} \\ \textit{elementi di una linea di } A \textit{ per} \\ \textit{i rispettivi complementi algebrici} \end{array} ;$$

La scelta della linea e' irrilevante; questo e' un fatto non banale che noi non dimostriamo.

In simboli, il determinante della matrice A e' il valore comune agli sviluppi di Laplace per colonne

$$Det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A(i,j) DetA(\hat{i},\hat{j}), \qquad j = 1, \ldots, n$$

ed agli sviluppi di Laplace per righe

$$Det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A(i,j) DetA(\hat{i},\hat{j}), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Il fatto che tutte queste espressioni diano lo stesso risultato non e' per niente banale.

Risulta che il determinante di una matrice e' uguale al determinante della sua trasposta:

$$DetA = DetA^T.$$

Per certi tipi di matrici, la scelta di una opportuna linea puo' semplificare molto l'espansione del determinante. Ad esempio, per la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix},$$

scegliendo sempre lo sviluppo rispetto alla prima colonna si ha

$$Det\ A = 2 \cdot Det \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 0 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} = 2 \cdot 6 \cdot Det \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} = 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 11 = 1188.$$

In generale, il determinante di una matrice triangolare superiore e' il prodotto dei suoi elementi diagonali:

$$Det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Nei quattro punti seguenti i risultati sui determinanti, dati nelle lezioni precedenti in casi particolari, vengono estesi in tutta la loro generalita', commentati e completati.

2. Sia n un intero positivo arbitrariamenente fissato. La funzione dall'insieme delle matrici di ordine n verso i numeri reali che ad ogni matrice associa il suo determinante gode delle seguenti proprieta':

   - Se A e B sono due matrici, in tutto uguali, tranne che in una linea, e se il vettore che la occupa in A e' r $(\in R)$ volte il vettore che la occupa in B, allora
   $$Det\ A = r\ Det\ B;$$
   - Se A, B, C sono tre matrici, in tutto uguali, tranne che in una linea, e se il vettore che la occupa in A e' la somma dei vettori che la occupano in B e C, allora
   $$Det\ A = Det\ B + Det\ C;$$
   - Se A e' una matrice in cui due linee parallele sono occupate da vettori uguali, allora
   $$Det\ A = 0;$$
   - Se una matrice A e' ottenuta da una matrice B scambiando due linee parallele, allora
   $$Det\ A = -Det\ B.$$
   - Per la matrice unita' I_n si ha
   $$Det\ I_n = 1.$$

   Noi abbiamo verificato queste proprieta' nel caso $n = 2$; la verifica nel caso generale puo' essere svolta per induzione, ma non la svolgiamo.

   Dalle queste proprieta' segue che

- Se una matrice B e' ottenuta da una matrice A sommando ad una linea un multiplo di una linea ad essa parallela, allora

$$Det\ A = Det\ B.$$

Lo verifichiamo, per le righe, nel caso $n = 2$; la verifica nel caso generale non e' tanto diversa.

$A = \begin{bmatrix} \underline{a}' \\ \underline{b}' \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \underline{a}' \\ \underline{b}' + r\underline{a}' \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} Det\ B &= Det \begin{bmatrix} \underline{a}' \\ \underline{b}' + r\underline{a}' \end{bmatrix} \\ &= Det \begin{bmatrix} \underline{a}' \\ \underline{b}' \end{bmatrix} + r Det \begin{bmatrix} \underline{a}' \\ \underline{a}' \end{bmatrix} \\ &= Det \begin{bmatrix} \underline{a}' \\ \underline{b}' \end{bmatrix} = Det\ A. \end{aligned}$$

Grazie a questa proprieta', possiamo calcolare il determinante di una matrice numerica A trasformandola, mediante l'algoritmo di Gauss, in una matrice triangolare superiore B, e poi prendendo il prodotto degli elementi diagonali di B, eventualmente cambiato di segno se si sono usati scambi di riga.

Ad esempio:

$$Det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 11 \end{bmatrix} = Det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -10 \end{bmatrix} = Det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = -6.$$

3. **Regola di Cramer** Sia A una matrice quadrata di ordine n, con $Det A \neq 0$, allora tutti i sistemi lineari

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

con matrice dei coefficienti A sono determinati; inoltre

$$x_i = \frac{Det\ A_i}{Det\ A}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

dove A_i e' la matrice ottenuta da A sostituendo la colonna $i-$ma con la colonna $\underline{b}$ dei termini noti.

Dai conti che conducono alla regola di Cramer si puo' ricavare che, per ogni matrice A quadrata di ordine n,

- *A e' non singolare o, equivalentemente, A e' invertibile, se e solo se*

$$Det A \neq 0.$$

4. **Teorema di Binet** Per ogni due matrici A e B quadrate dello stesso ordine, si ha
$$Det\ (AB) = DetA\ DetB.$$
Per esercizio, si verifichi che questa proprieta' vale nel caso in cui A e B sono matrici triangolari superiori.

5. I determinanti permettono di dare una formula per la matrice inversa della generica matrice invertibile di ordine n
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad Det\ A \neq 0.$$
Precisamente, si ha
$$A^{-1} = \frac{1}{Det\ A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$
dove A_{ij} e' il *complemento algebrico* di posto (i, j) della atrice A :
$$A_{ij} = (-1)^{i+j} DetA(\hat{i}, \hat{j}).$$
In particolare, per la generica matrice invertibile di ordine 2
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad ad - bc \neq 0,$$
si ha
$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Autovalori e autovettori

1. Sia A una matrice quadrata di ordine n. Ricordiamo che un vettore colonna non nullo $\underline{v} \neq \underline{0}$ si dice autovettore di A se A agisce su $\underline{v}$ come la moltiplicazione per uno scalare:
$$A\underline{v} = \lambda \underline{v}, \qquad \lambda \in R;$$
lo scalare λ si dice autovalore di A associato all'autovettore $\underline{v}$. Uno scalare si dice autovalore di A se e' l'autovalore associato a qualche autovettore di A.

Osserviamo che a ciascun autovettore e' associato un solo autovalore. Infatti, se λ e μ sono entrambi autovalori associati ad uno stesso autovettore $\underline{v}$ di A, cioe' se

$A\underline{v} = \lambda\underline{v}, \qquad A\underline{v} = \mu\underline{v},$

allora si ha l'uguaglianza

$\lambda\underline{v} = \mu\underline{v},$

che si puo' riscrivere nella forma

$(\lambda - \mu)\underline{v} = \underline{0},$

che a sua volta, poiche' $\underline{v} \neq \underline{0}$, implica

$\lambda - \mu = 0, \qquad cioe' \qquad \lambda = \mu.$

2. Riconsideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix},$$

che possiede un autovettore

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

con autovalore associato $\lambda = 1:$

$$A\underline{u} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \underline{u};$$

e possiede un autovettore

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

con autovalore associato $\lambda = 0.5:$

$$A\underline{v} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 0.5 \cdot \underline{v}.$$

3. Iniziamo a chiederci come si possano ricavare degli autovettori di A cui e' associato l'autovalore $\lambda = 1$. Tali autovettori sono i vettori colonna $\underline{x} \neq \underline{0}$ caratterizzati dalla condizione

$A\underline{x} = \underline{x},$

che si puo' riscrivere

$A\underline{x} - \underline{x} = \underline{0},$

o

$A\underline{x} - I_2\underline{x} = \underline{0},$

o

$(A - I_2)\underline{x} = \underline{0}.$

Abbiamo cosi' trovato il sistema lineare omogeneo

$$\begin{bmatrix} -0.2 & 0.3 \\ 0.2 & -0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underline{0},$$

che si riduce alla sola equazione lineare omogenea

$-0.2x_1 + 0.3x_2 = 0.$

Ora, le soluzioni di questa equazione sono del tipo

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}p \\ p \end{bmatrix}, \qquad p \in R.$$

Questi vettori, con $p \neq 0$, sono tutti e soli gli autovettori di A cui e' associato l'autovalore $\lambda = 1$; in particolare, per $p = 2$ ritroviamo l'autovettore $\underline{u}$.

4. Ci chiediamo ora se $\lambda = -1$ e' un autovalore di A. Cerchiamo gli eventuali autovettori di A cui sia associato l'autovalore $\lambda = -1$. Tali autovettori sono i vettori colonna $\underline{x} \neq \underline{0}$ caratterizzati dalla condizione

   $A\underline{x} = -\underline{x},$

   che si puo' riscrivere

   $A\underline{x} + \underline{x} = \underline{0},$

   o

   $A\underline{x} + I_2\underline{x} = \underline{0},$

   o

   $(A + I_2)\underline{x} = \underline{0}.$

   Abbiamo cosi' trovato il sistema lineare omogeneo

   $$\begin{bmatrix} 1.8 & 0.3 \\ 0.2 & 1.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underline{0},$$

   che ha solo la soluzione banale $\underline{x} = \underline{0}$. Dunque non c'e' nessun autovettore di A cui sia associato $\lambda = -1$. Concludiamo che $\lambda = -1$ non e' un autovalore di A.

5. Uno scalare λ sara' un autovalore della matrice A se esistono dei vettori colonna $\underline{x} \neq \underline{0}$ che soddisfano la condizione

   $A\underline{x} = \lambda\underline{x},$

   che si puo' riscrivere

$A\underline{x} - \lambda\underline{x} = \underline{0},$

o

$A\underline{x} - \lambda I_2\underline{x} = \underline{0},$

o

$(A - \lambda I_2)\underline{x} = \underline{0}.$

Abbiamo cosi' trovato il sistema lineare omogeneo

$$\begin{bmatrix} 0.8-\lambda & 0.3 \\ 0.2 & 0.7-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underline{0}.$$

Ora, questo sistema lineare omogeneo avra' una soluzione non banale $\underline{x} \neq \underline{0}$. se e solo se

$$Det \begin{bmatrix} 0.8-\lambda & 0.3 \\ 0.2 & 0.7-\lambda \end{bmatrix} = 0,$$

cioe' se e solo se λ e' soluzione dell'equazione di secondo grado

$(0.8 - \lambda)(0.7 - \lambda) - 0.3 \cdot 0.2 = 0,$

cioe'

$\lambda^2 - 1.5\lambda - 0.5 = 0.$

Ora, le soluzioni di questa equazione sono

$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 0.5.$

Abbiamo cosi' ritrovato i due autovalori della matrice A che sono associati agli autovettori $\underline{u}$ e $\underline{u}$; possiamo inoltre affermare che A non possiede altri autovalori al di fuori di 1 e 0.5.

6. Sia ora A una matrice quadrata di ordine n :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Uno scalare λ sara' un autovalore della matrice A se esistono dei vettori colonna $\underline{x} \neq \underline{0}$ che soddisfano la condizione

$A\underline{x} = \lambda\underline{x},$

che si puo' riscrivere

$A\underline{x} - \lambda\underline{x} = \underline{0},$

o

$A\underline{x} - \lambda I_n \underline{x} = \underline{0}$,

o

$(A - \lambda I_n)\underline{x} = \underline{0}$.

Abbiamo cosi' trovato il sistema lineare omogeneo di n equazioni in n incognite

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underline{0}.$$

Ora, questo sistema lineare omogeneo avra' una soluzione non banale $\underline{x} \neq \underline{0}$. se e solo se λ e' soluzione dell'equazione

$$Det(A - \lambda I_n) = Det \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Il polinomio che compare al primo membro di questa equazione e' detto *polinomio caratteristico* della matrice A; e' un polinomio di grado n pari all'orine della matrice.

Possiamo dunque infine dire che

- gli autovalori di una matrice A di ordine n sono le radici del polinomio caratteristico di A.