

Algebra/Algebra Lineare

Esercizi per l'esercitazione del 29.02.08

1. Discutere e, quando possibile, risolvere i seguenti sistemi lineari nelle incognite x, y, z , dove p, q, r, s sono parametri. Quando possibile, si risolva il sistema invertendo la matrice dei coefficienti.

$$\begin{cases} x + y + z = p \\ x + 2y + 2z = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = p \\ x + 2y + 2z = q \\ x + 2y + 3z = r \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = p \\ 2x + 3y - 5z = q \\ 3x + 4y - 7z = r \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = p \\ x + 2y + 2z = q \\ x + 2y + 3z = r \\ 3x + 2y + 2z = s \end{cases}$$

2. Si determini l'equazione

$$y = a + bx + cx^2$$

della parabola passante per i punti

$$(1, 2), (2, 6), (3, 4).$$

3. Si dimostri la seguente affermazione.

Se D ed A sono matrici quadrate dello stesso ordine, con D diagonale, allora moltiplicare A a sinistra per D equivale a moltiplicare ciascuna riga di A per il corrispondente elemento diagonale di D , e moltiplicare A a destra per D equivale a moltiplicare ciascuna colonna di A per il corrispondente elemento diagonale di D .

4. Si puo' dire che una matrice A quadrata di ordine n e' triangolare superiore se i soli elementi di A che possono essere diversi da zero sono quelli del tipo

$$A(i, j), \quad \text{con } i \leq j.$$

E' vero che il prodotto di due matrici triangolari superiori e' ancora una matrice triangolare superiore? Si motivi la risposta.

5. Sia dato un vettore colonna

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

Si provi che ogni vettore colonna

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

si puo' scrivere in uno ed un solo modo come somma di un vettore che sia multiplo di p e di un vettore che sia soluzione dell'equazione

$$p_1x_1 + \cdots + p_nx_n = 0.$$

6. Usando la regola di Cramer, si ricavi la formula per la retta

$$y = mx + q$$

passante per due punti

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$$

con $x_1 \neq x_2$.

7. Usando la regola di Cramer, si ricavi la formula per il piano

$$z = mx + ny + q$$

passante per due punti

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3),$$

sotto le dovute condizioni. Si esprimano le condizioni e le formule per m, n, p senza sviluppare i determinanti.

8. Si determinino autovalori ed autovettori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

e si dia una formula per la potenza A^n , per n intero relativo.