Algebra - Algebra lineare, 03.03.08

1. Sia n un intero positivo fissato. Lo *spazio vettoriale* $\mathbb{R}^n$ e' l'insieme delle $n-$ple ordinate di numeri reali, che rappresenteremo sempre come vettori colonna

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

munito dell'operazione di addizione di due $n-$ple, definita da

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

e dell'operazione di moltiplicazione di una $n-$pla per un numero reale, definita da

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} r = \begin{bmatrix} a_1 r \\ \vdots \\ a_n r \end{bmatrix}.$$

Penseremo ciascuna $n-$pla come un'unica entita', e le indicheremo con lettere minuscole $a, b, \ldots, v, \ldots$. La n-pla

$$0_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

viene detta *vettore nullo* di $\mathbb{R}^n$.

Al posto di $n-$pla useremo spesso il termine *vettore*, e al posto di numero reale useremo il termine *scalare*.

Data una sequenza di un certo numero di vettori $a_1, a_2, \ldots, a_p \in \mathbb{R}^n$ ed una sequenza di un uguale numero di scalari $r_1, r_2, \ldots, r_p \in \mathbb{R}$, moltiplicando ciascun vettore per il corrispondente scalare e poi sommando otteniamo un nuovo vettore

$$a_1 r_1 + a_2 r_2 + \cdots + a_p r_p \in \mathbb{R}^n,$$

detto *combinazione lineare* dei vettori $a_1, a_2, \ldots, a_p$ con coefficienti $r_1, r_2, \ldots, r_p$.

2. Possiamo usare queste operazioni sui vettori per dare una rappresentazione sintetica del generico sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

di n equazioni in p incognite.

Infatti, le n uguaglianze di cui consiste il sistema possono essere sintetizzate nell'unica uguaglianza

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

che a sua volta puo' essere scritta nella forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{bmatrix} x_p = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

e puo' essere rappresentata sinteticamente nella forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b,$$

dove

$$a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}, \qquad j = 1, \ldots, p, \qquad e \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Possiamo dunque dire che una $p-$pla $(r_1, r_2, \ldots, r_p)$ di numeri reali e' una soluzione del sistema lineare se e solo se la combinazione lineare con coefficienti $r_1, r_2, \ldots, r_p$ delle colonne dei coefficienti delle incognite e' uguale alla colonna termine noto.

3. **Vettori applicati su una retta con un punto fissato.**

Un segmento per il quale si sia scelto un verso di percorrenza viene detto *segmento orientato*; il segmento orientato di primo estremo A e secondo estremo B viene indicato con AB. Consideriamo inizialmente i segmenti orientati su una stessa retta.

Dati due segmenti orientati AB e BC sulla retta tali che il secono estremo del primo segmento coincida col primo estremo del secondo segmento, prendendo nell'ordine il primo estremo del primo segmento e il secondo estremo del secondo segmento otteniamo un nuovo segmento orientato AC, detto somma di AB e BC:

$AB + BC = AC.$

Diciamo che due segmenti orientati sulla retta sono *equivalenti* quando hanno la stessa lunghezza e lo stesso verso. Dati un segmento rientato AB ed un punto P, si ha che c'e' uno ed un solo segmento orientato PB' che ha primo estremo P ed e' equivalente ad AB.

Sia ora O un punto fissato sulla retta. Dati sulla retta due segmenti orientati OA e OB con primo estremo O, sommando OA col segmento orientato AB' equivalente a OB otteniamo un nuovo segmento orientato con primo estremo O, che viene detto somma di OB e OA :

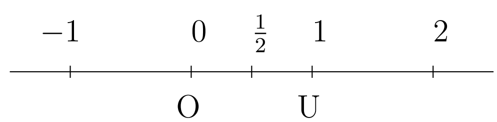
$OA + OB := OA + AB' = OB'$.

Questa operazione posside le usuali proprieta' dell'addizione di numeri reali; il ruolo del numero zero e' giocato dal segmento OO; l'opposto di un segmento orientato e' il suo simmetrico rispetto ad O.

Al posto del termine "segmento orientato con primo estremo O" useremo il termine "vettore applicato in O".

4. **Interpretazione geometrica della addizione di numeri reali.**

Sia data una retta, con un punto pivilegiato O detto punto origine e un punto prilegiato U detto punto unita'. Allora c'e' un modo naturale di associare a ciascun numero reale un punto della retta, in modo che ai numeri zero e uno corrispondano rispettivamente i punti origine O e unita' U.



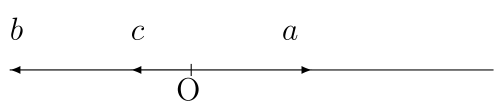
Spesso identificheremo un punto della retta con il vettore applicato in O avente come secondo estremo tale punto.

Possimo cosi' rappresentare i numeri reali con vettori applicati in O. L'addizione dei numeri reali viene allora rappresentata dall'addizione dei vettori applicati. Precisamente: se a, b e c sono tre numeri reali, con

$c = a + b$,

e se A, B e C sono i punti corrispondenti sulla retta, allora si ha

$OC = OA + OB$.



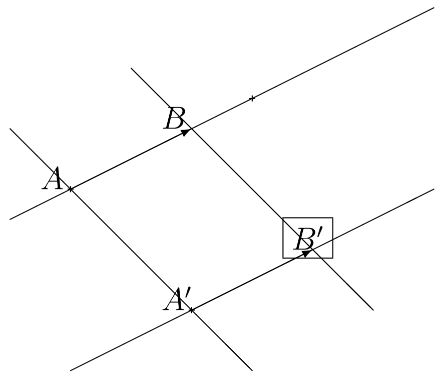
5. **Vettori applicati nel piano.**

Consideriamo ora i segmenti orientati nel piano. Diciamo che due segmenti orientati sono equivalenti quando hanno la stessa direzione, lunghezza, e verso.

Fissato un segmento orientato AB, per ogni punto A' del piano esiste uno ed un solo segmento orientato $A'B'$ con primo estremo A' che sia equivalente ad AB.

Se A' e' sulla retta individuata da A e B, allora e' intuitivamente chiaro come possiamo costruire $A'B'$.

Se A' non e' sulla retta individuata da A e B, allora possiamo costruire B' intersecando la retta per A' parallela alla retta per A, B con la retta per B parallela alla retta per A, A'.

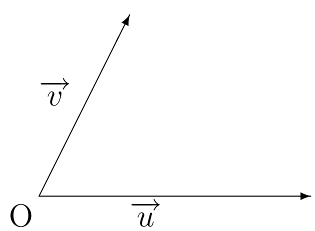


Diciamo che abbiamo "tralsato" il segmento orientato AB nel segmento orientato $A'B'$.

6. D'ora innanzi, al posto dell'espressione "segmento orientato con primo estremo in A" diremo "vettore applicato in A"; indicheremo i vettori applicati con simboli come $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \ldots$.

   Sia O un punto fissato nel piano.

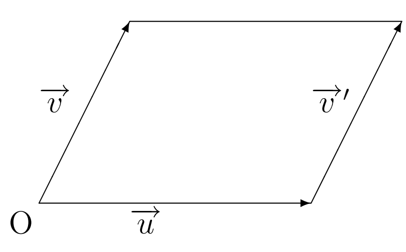
   Dati due vettori $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ applicati in O,



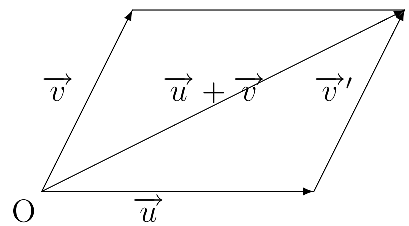
   definiamo il vettore

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$$

   loro somma come il vettore applicato in O costruito come segue: prima trasliamo il vettore $\overrightarrow{v}$ in modo che il suo primo estremo coincida col secondo estremo di $\overrightarrow{u}$, ottenendo cosi' un nuovo vettore $\overrightarrow{v}'$



poi consideriamo il vettore applicato in O avente come secondo estremo il secondo estremo di $\overrightarrow{v}'$:



In altri termini, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ e' la diagonale, uscente da O, del parallelogramma che ammette $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ come lati consecutivi.

Nel caso di vettori allineati, la somma e' sostanzialmente quella dei numeri reali.

Questa operazione di addizione di vettori risulta essere commutativa

$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$,

e associativa:

$(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})$,

per ogni terna di vettori $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$.

Il ruolo del numero zero viene svolto dal vettore i cui estremi coincidono con il punto O; questo vettore viene detto vettore nullo, e viene indicato col simbolo

$$\overrightarrow{0}.$$

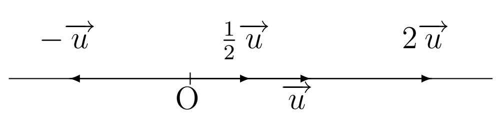
La somma di un qualsiasi vettore col vettore suo simmetrico rispetto ad O ha per risultato il vettore nullo; cosi', per ogni $\overrightarrow{v}$, il suo simmetrico rispetto ad O viene indicato con

$$-\overrightarrow{v}.$$

7. Dato un vettore $\overrightarrow{v}$ applicato in O, c'e' un modo naturale per definire il prodotto di un numero reale per $\overrightarrow{v}$: per un numero intero n, si pone

$$n\overrightarrow{v}=\begin{cases} \overrightarrow{v}+\quad\overrightarrow{v}+\cdots+\quad\overrightarrow{v} & n\ volte \quad per\ n=1,2,\ldots \\ \underline{0} & \qquad\qquad\ \ per\ n=0 \\ (-\overrightarrow{v})+(-\overrightarrow{v})+\cdots+(-\overrightarrow{v}) & -n\ volte \quad per\ n=-1,-2,\ldots \end{cases}$$

... poi si passa, possiamo dire "per suddivisione" , al caso dei numeri razionali, e infine, possiamo dire "per continuita'" ai reali.



Abbiamo cosi' definito due operazioni: l'addizione di due vettori applicati in O, che fornisce un vettore applicato in O, e la moltiplicazione di un vettore applicato in O per uno scalare reale, che fornisce ancora un vettore applicato in O.

Il calcolo con queste due operazioni gode delle usuali proprieta' del calcolo letterale; bisogna solo tenere presente che abbiamo oggetti di due nature, vettori e scalari, possiamo sommare vettori con vettori, moltiplicare vettori per scalari, ma non possiamo sommare vettori con scalari, ne' moltiplicare vettori per vettori.

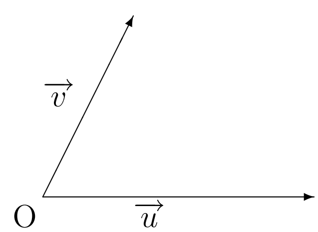
Data una sequenza di un certo numero di vettori $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \dots$, ed una sequenza dello stesso numero di scalari $r_1, r_2, \dots$, moltiplicando ciascun vettore per il corrispondente scalare e poi sommando otteniamo un nuovo vettore

$$r_1 \overrightarrow{a}_1 + r_2 \overrightarrow{a}_2 + \cdots ,$$

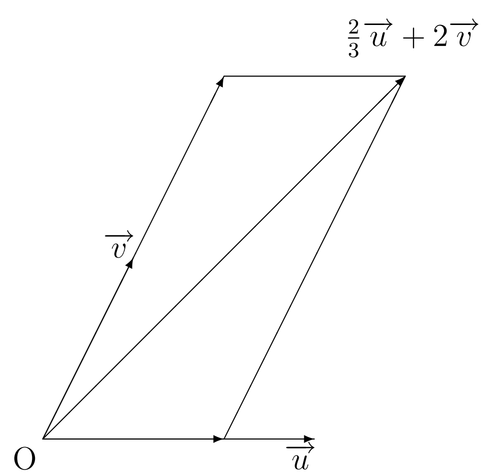
detto *combinazione lineare* dei vettori dati; il numero reale r_i viene detto coefficiente del vettore $\overrightarrow{a}_i$ nella combinazione lineare.

Esempio

- La combinazione lineare dei vettori $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ applicati in O



con pesi rispettivi $\frac{2}{3}$ e 2 da' come risultato il vettore



8. **Interpretazione geometrica delle operazioni su $\mathbb{R}^2$**

Fissati nel piano un punto O, una prima retta per O con un punto privilegiato diverso da O, ed una seconda retta per O, ortogonale alla prima, con un punto privilegiato diverso da O, c'e' un modo naturale di associare a ciascuna coppia ordinata di numeri reali un punto del piano, in modo che alla coppia $(0,0)$ corrisponda l'origine O, alla coppia $(1,0)$ corrisponda il punto unita' della prima retta, e alla coppia $(0,1)$ corrisponda il punto unita' della seconda retta. Ciascun punto del piano si ottiene in corrispondenza di una ed una sola coppia (p,q) di numeri reali, che vengono dette le *coordinate* del punto nel sistema di riferimento.

Si ha cosi' una corrispondenza biunivoca fra $\mathbb{R}^2$ e i punti del piano. Spesso identificheremo un punto del piano col vettore applicato in O avente secondo estremo in quel punto.

L'addizione di coppie di numeri reali viene allora rappresentata dall'addizione dei vettori applicati. Precisamente, se alle due coppie

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

corrispondono i vettori applicati

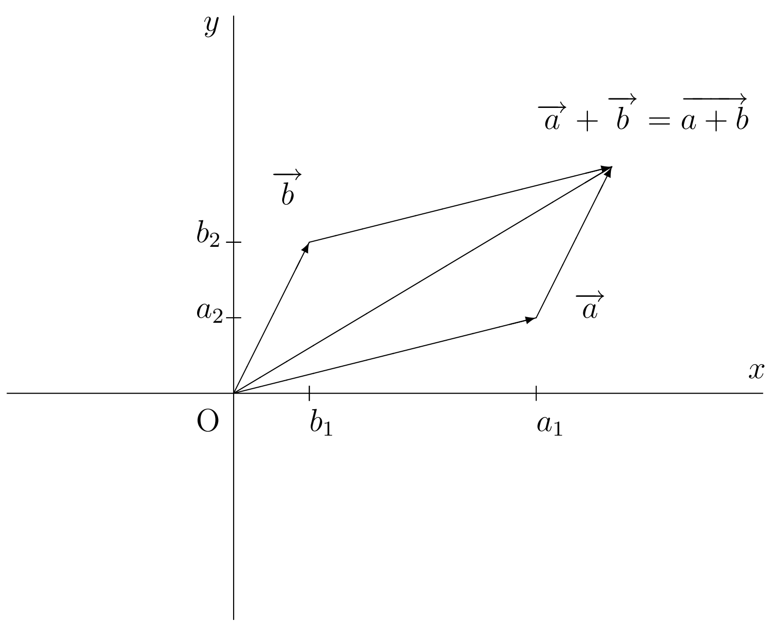
$$\overrightarrow{a}, \qquad \overrightarrow{b},$$

allora alla coppia somma

$$a+b = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{bmatrix},$$

corrisponde il vettore applicato somma

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}.$$



La moltiplicazione di una coppia di numeri reali per un numero reale viene rappresentata dalla moltiplicazione di un vettore applicato per un numero reale. Precisamente, se alla coppia

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

corrisponde il vettori applicato

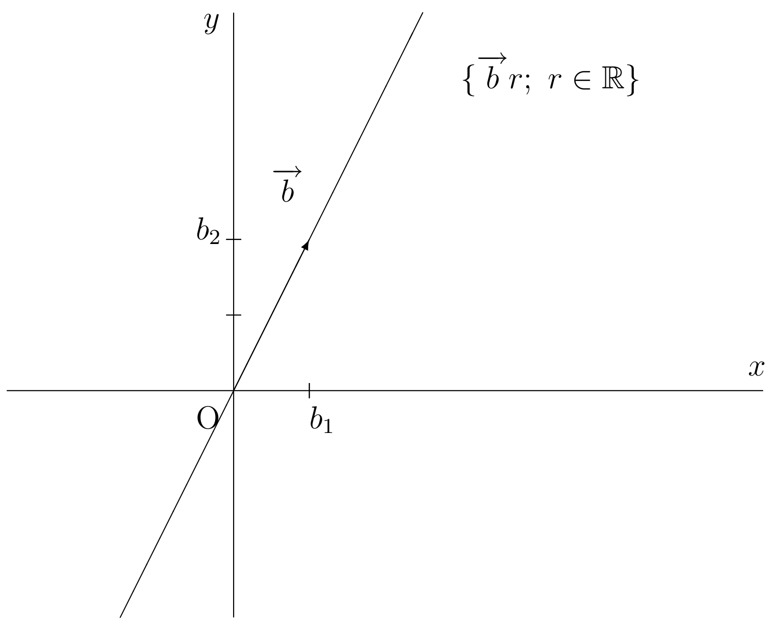
$\overrightarrow{b}$,

e se r e' un numero reale, allora alla coppia prodotto

$br = \begin{bmatrix} b_1 r \\ b_2 r \end{bmatrix}$

corrisponde il vettore applicato prodotto

$\overrightarrow{b}\, r$.



Si ha che due coppie non nulle sono proporzionali se e solo se i corrispondenti vettori applicati sono allineati.

D'ora in poi identificheremo ciascuna coppia ordinata di numeri reali col corrispondente vettore applicato in O, ed useremo come simboli lettere minuscole semplici, come a al posto di $\overrightarrow{a}$.

9. I sistemi di due equazioni lineari possono essere interpretati geometricamente come impostazione di problemi di rappresentazione di un vettore come combinazione lineare di certi assegnati vettori, nel piano.

   Ad esempio, il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 & = & 5 \\ 4x_1 + x_2 & = & 4 \end{cases}$$

   puo' essere rappresentato nella forma

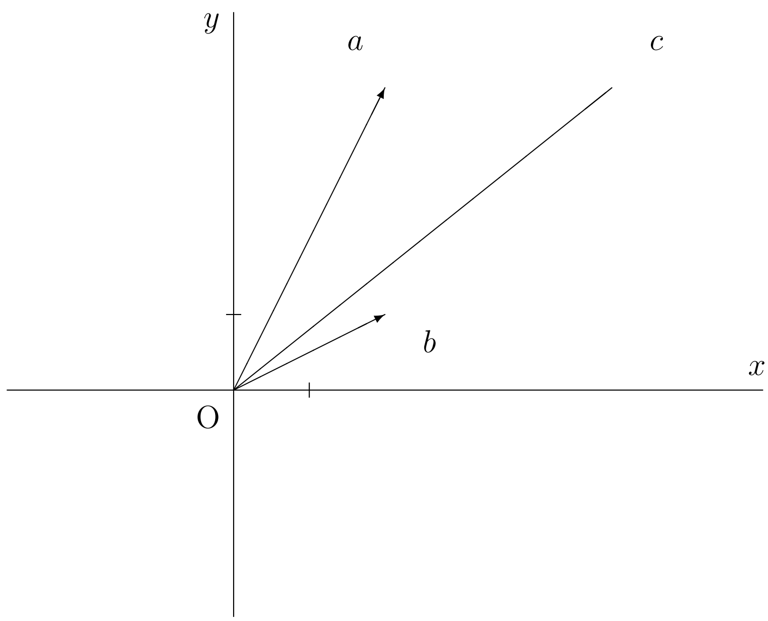
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix},$$

   e sinteticamente come

$$ax + by = c,$$

dove $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Abbiamo cosi' espresso il sistema lineare dato, di due equazioni lineari a coefficienti scalari nelle due incognite x_1, x_2 come un'unica equazione lineare a coefficienti vettoriali nelle due incognite x_1, x_2 che traduce il problema: determinare, se possibile, le combinazioni lineari dei vettori a, b il cui risultato e' il vettore c.



Il fatto che il sistema lineare abbia l'unica soluzione $x_1 = 0.5$, $x_2 = 2$ viene a significare che c'e' una ed una sola combinazione lineare dei vettori a, b il cui risultato e' il vettore c, ed e' quella in cui i coefficienti valgono 0.5 e 2 :

$$0.5a + 2b = c.$$

10. Piu' in generale, i sistemi lineari

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 &= c_1 \\ 4x_1 + x_2 &= c_2 \end{cases}$$

possono essere interpretati come la posizione del problema di rappresentare il generico vettore c del piano come combinazione lineare dei vettori a, b.

Per ciascun vettore c, questo problema ha una ed una sola soluzione. Possiamo renderci conto geometricamnte di questo fatto nel modo seguente.

Dato un qualsiasi vettore c del piano, possiamo:

- tracciare per il punto finale di c la retta parallela alla retta di b ed intersecarla con la retta da a, ottenendo cosi' un vettore rappresentabile nella forma αa;

- tracciare per il punto finale di c la retta parallela alla retta di a ed intersecarla con la retta da b, ottenendo cosi' un vettore rappresentabile nella forma βb.

Per costruzione si ha

$c = \alpha \; a + \beta \; b,$

inoltre questa e' l'unica scrittura di c come combinazione lineare di a e b.

11. Il generico sistema

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 & = & c_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 & = & c_2 \end{cases}$$

di due equazioni lineari nelle due incognite x_1, x_2, con coefficienti a_i, b_i e termini noti c_i in $\mathbb{R}$, e' equivalente all'unica equazione lineare

$$ax + by = c,$$

dove

$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$

la quale puo' essere interpretata come la posizione del problema di determinare le scritture del vettore c come combinazione lineare dei vettori a e b.

Ora, se i vettori a, b sono diversi dal vettore nullo e non sono proporzionali, si ha che

> ogni vettore c del piano si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare
>
> $$c = \alpha a + \beta b$$
>
> dei vettori a e b.

Possiamo allora dire che i vettori a e b formano un sistema di riferimento per il piano, e che i coefficienti α e β in questa combinazione lineare sono le coordinate di c in questo sistema di riferimento.